NCERT के पूर्णतया संशोधित नवीनतम् पाठ्यक्रम पर आधारित

संजीव®

गणित

कक्षा-12 (भाग-2)

माध्यमिक शिक्षा बोर्ड, राजस्थान के विद्यार्थियों के लिए

लेखक :

एस. सी. गुप्ता
एम.एससी., एम.एड.
वरिष्ठ व्याख्याता गणित
राजकीय आदर्श उच्च माध्यमिक विद्यालय
सुजानपुरा, बस्सी (जयपुर)

डॉ. आर. वाधवानी
एम.एससी., एम.फिल., पीएच.डी.

2024

मूल्य : ₹ 440/-

संजीव प्रकाशन
जयपुर-3

- प्रकाशक :

  संजीव प्रकाशन

  धामाणी मार्केट, चौड़ा रास्ता,

  जयपुर-3

  email : sanjeevprakashanjaipur@gmail.com
  website : www.sanjivprakashan.com

- © प्रकाशकाधीन

- **मूल्य : ₹ 440.00**

- लेजर कम्पोजिंग :

  संजीव प्रकाशन (D.T.P. Department), जयपुर

- मुद्रक :

  पंजाबी प्रेस, जयपुर

  ****

- इस पुस्तक में त्रुटियों को दूर करने के लिए हर संभव प्रयास किया गया है। किसी भी त्रुटि के पाये जाने पर अथवा किसी भी तरह के सुझाव के लिए आप हमें निम्न पते पर email या पत्र भेजकर सूचित कर सकते हैं—

  email : sanjeevprakashanjaipur@gmail.com
  पता : प्रकाशन विभाग संजीव प्रकाशन
  धामाणी मार्केट, चौड़ा रास्ता, जयपुर

  आपके द्वारा भेजे गये सुझावों से अगला संस्करण और बेहतर हो सकेगा।
- यद्यपि इस पुस्तक को प्रकाशित करने में सभी सावधानियों का पालन किया गया है तथापि इस पुस्तक में प्रकाशित किसी त्रुटि के प्रति तथा इससे होने वाली किसी भी क्षति के लिए लेखक, प्रकाशक, संपादक तथा मुद्रक किसी भी रूप में जिम्मेदार नहीं हैं।
- सभी प्रकार के विवादों का न्यायिक क्षेत्र 'जयपुर' होगा।

प्रस्तावना

ज्ञान एवं विज्ञान में तीव्र गति से हो रही वृद्धि को ध्यान में रखते हुए प्रस्तुत पुस्तक **'गणित भाग-2'** का यह संस्करण राजस्थान बोर्ड द्वारा स्वीकृत **कक्षा-12 के नवीनतम संशोधित N.C.E.R.T. पाठ्यक्रमानुसार** लिखा गया है। प्रस्तुत सन्दर्भ पुस्तक इस कक्षा में आने वाले विज्ञान, वाणिज्य एवं कला वर्ग के विद्यार्थियों के स्तर को ध्यान में रखकर लिखी गयी है।

प्रस्तुत संस्करण की निम्न विशेषताएँ हैं—

1. विषय-वस्तु की भाषा-शैली को सरल-सहज व पूर्ण रूप से राजस्थान राज्य के अनुरूप रखा गया है जिससे कि विद्यार्थी ज्ञान को आसानी से समाहित कर सकें।
2. विभिन्न गणितीय सूत्रों का समावेश।
3. महत्त्वपूर्ण तथ्यों का समावेश।
4. पुस्तक में आवश्यकतानुसार हल सहित उदाहरण, प्रत्येक विषय-वस्तु के साथ दिये गये हैं, जिससे विद्यार्थी गणित विषय के सिद्धान्तों के अनुप्रयोगों को आसानी से समझ सकें।
5. NCERT के सभी प्रश्नों का हल पुस्तक के प्रत्येक अध्याय में समायोजित है।
6. प्रत्येक अध्याय के अन्त में **महत्त्वपूर्ण प्रश्न (वस्तुनिष्ठ, रिक्त स्थान, अतिलघूत्तरात्मक, लघूत्तरात्मक एवं निबन्धात्मक) हल सहित दिये गये हैं,** जिससे विद्यार्थी में आत्मविश्वास उत्पन्न हो।
7. प्रत्येक अध्याय के अन्त में **विभिन्न प्रतियोगी परीक्षाओं में पूछे गये बहुविकल्पीय प्रश्नों को भी हल सहित** दिया गया है।

हमारे द्वारा भरसक प्रयास किया गया है कि यह पुस्तक विद्यार्थियों, अध्यापकों की आवश्यकताओं की पूर्ति करेगी तथा उनके लिए लाभदायक सिद्ध होगी।

आशा है कि यह पुस्तक C.B.S.E. के हिन्दी माध्यम के विद्यार्थियों के लिये भी मददगार सिद्ध होगी।

पुस्तक का नवीनतम संशोधित संस्करण नये कलेवर में प्रस्तुत किया जा रहा है। इसमें विषय विशेषज्ञों, शिक्षकों तथा पाठकों से प्राप्त बहुमूल्य सुझावों को भी उचित स्थान दिया गया है।

हम उन सभी विद्वानों, लेखकों के आभारी हैं जिनसे हमें निरन्तर प्रेरणा एवं मार्गदर्शन प्राप्त होते रहे हैं।

इस पुस्तक के प्रकाशन हेतु हम संजीव प्रकाशन के भी अत्यन्त आभारी हैं जिनके अथक तथा सतत प्रयासों से इस पुस्तक का प्रकाशन हो पाया है।

लेखक अपने परिश्रमपूर्ण प्रयास को तभी सफल मानेंगे जब यह पुस्तक सम्बन्धित छात्रों के लिए अधिक से अधिक लाभदायक सिद्ध होगी। प्रस्तुत पुस्तक को और अधिक उपयोगी बनाने हेतु शिक्षकों एवं पाठकगण के बहुमूल्य सुझावों का सहर्ष स्वागत किया जायेगा। अत: हम उनके आभारी रहेंगे।

लेखक

एस.सी. गुप्ता

डॉ. आर. वाधवानी

विषय-सूची

7. समाकलन
(Integrals) 1-132

8. समाकलनों के अनुप्रयोग
(Application of Integrals) 133-150

9. अवकल समीकरण
(Differential Equations) 151-216

10. सदिश बीजगणित
(Vector Algebra) 217-263

11. त्रि-विमीय ज्यामिति
(Three Dimensional Geometry) 264-286

12. रैखिक प्रोग्रामन
(Linear Programming) 287-301

13. प्रायिकता
(Probability) 302-339

उच्च माध्यमिक परीक्षा, 2023

गणित (Mathematics)

समय : 3 घण्टे 15 मिनट **पूर्णांक : 80**

परीक्षार्थियों के लिए सामान्य निर्देश :

1. परीक्षार्थी सर्वप्रथम अपने प्रश्न-पत्र पर नामांक अनिवार्यत: लिखें।
2. सभी प्रश्न करने अनिवार्य हैं।
3. प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दी गई उत्तर-पुस्तिका में ही लिखें।
4. जिन प्रश्नों में आन्तरिक खण्ड हैं, उन सभी के उत्तर एक साथ ही लिखें।
5. प्रश्न-पत्र के हिन्दी व अंग्रेजी रूपान्तर में किसी प्रकार की त्रुटि/अन्तर/विरोधाभास होने पर हिन्दी भाषा के प्रश्न को ही सही मानें।
6. प्रश्न का उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें।
7. प्रश्न संख्या 17 से 23 में आन्तरिक विकल्प दिये गए है।
8. प्रश्न संख्या 23 ग्राफ पेपर पर हल करना है।

खण्ड-अ (Section–A)

1. बहुविकल्पीय प्रश्न :

Multiple Choice Questions :

(i) यदि $f : R \to R, f(x) = \sin x$ तथा $g : R \to R, g(x) = x^2$ तब $(f \circ g)(x)$ बराबर है। **[1]**

If $f : R \to R, f(x) = \sin x$ and $g : R \to R, g(x) = x^2$ then $(f \circ g)(x)$ is equal to :

(A) $\sin x^2$ (B) $\sin x$ (C) $\sin^2 x^2$ (D) $\sin^2 x$

(ii) यदि किसी आव्यूह की कोटि $m \times n$ हैं, तो इसमें अवयवों की संख्या हैं- **[1]**

If the order of a matrix is $m \times n$, then the number of elements in it are–

(A) m (B) n (C) mn (D) $m-n$

(iii) यदि $y = x.\log_e x$, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान होगा- **[1]**

If $y = x.\log_e x$, then the value of $\frac{d^2y}{dx^2}$ will be–

(A) $\frac{1}{1+x}$ (B) $\frac{1}{x}$ (C) $\log_e(1+x)$ (D) $1+\log_e x$

(iv) $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ का x के सापेक्ष प्रति अवकलज है- **[1]**

The anti derivative of $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ with respect to x–

(A) $\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$ (B) $\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}x^2+C$

(C) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$ (D) $\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+C$

(v) $\int \cos^2 x\,dx$ का मान है- **[1]**

The value of $\int \cos^2 x\,dx$ is–

(A) $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C$ (B) $x^2+\frac{1}{4}\sin 2x+C$

(C) $\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\sin x+C$ (D) $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\sin^2 x+C$

(vi) वक्र $y = x^2$ एवं रेखा $y = 4$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है- [1]

The area of the region bounded by the curve $y = x^2$ and the line $y = 4$ is–

(A) $\frac{33}{2}$ (B) $\frac{8}{3}$ (C) $\frac{32}{3}$ (D) $\frac{4}{3}$

(vii) $\hat{i}.\left(\hat{j}\times\hat{k}\right)+\hat{j}.\left(\hat{i}\times\hat{k}\right)+\hat{k}.\left(\hat{i}\times\hat{j}\right)$ का मान है- [1]

The value of $\hat{i}.\left(\hat{j}\times\hat{k}\right)+\hat{j}.\left(\hat{i}\times\hat{k}\right)+\hat{k}.\left(\hat{i}\times\hat{j}\right)$ is–

(A) 0 (B) –1 (C) 1 (D) 3

(viii) यदि दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के परिमाण क्रमशः $\sqrt{3}$ व 2 हैं और $\vec{a}.\vec{b}=\sqrt{6}$ हो, तो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण है- [1]

If the magnitude of two vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are $\sqrt{3}$ and 2 respectively and $\vec{a}.\vec{b}=\sqrt{6}$, then the angle between $\vec{a}$ and $\vec{b}$ is–

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

(ix) x, y और z-अक्षों पर क्रमशः 2, 3 और 4 अंतः खंड काटने वाले समतल का समीकरण है- [1]

The equation of the plane with intercepts of 2, 3 and 4 on the x, y and z-axes respectively is–

(A) $4x + 6y + 3z = 12$ (B) $6x + 4y + 3z = 12$

(C) $3x + 4y + 6z = 12$ (D) $5x + 4y + 3z = 0$

(x) यदि $P(A)=\frac{7}{13}, P(B)=\frac{9}{13}$ और $P(A\cap B)=\frac{4}{13}$ हो, तो $P\left(\frac{A}{B}\right)$ का मान है- [1]

If $P(A)=\frac{7}{13}, P(B)=\frac{9}{13}$ and $P(A\cap B)=\frac{4}{13}$, then the value of $P\left(\frac{A}{B}\right)$ is–

(A) $\frac{4}{9}$ (B) $\frac{7}{9}$ (C) $\frac{5}{9}$ (D) $\frac{5}{13}$

(xi) यदि पासों का एक जोड़ा उछाला जाता है, तो प्रत्येक पासे पर सम अभाज्य संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता है- [1]

If a pair of dice is thrown, then the probability of getting an even prime number on each die is–

(A) 0 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{36}$

(xii) यदि एक सिक्के को तीन बार उछाला गया है, जहाँ E: तीसरी उछाल पर चित, F: पहली दोनों उछालों पर चित हो, तो P(E/F) का मान है- [1]

If a coin is tossed three times, where E: head on third toss; F: heads on first two tosses, then the value of P(E/F) is–

(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$

2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

Fill in the blanks :

(i) यदि $x\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}$ हो, तो $(x+y)=$ ..... होगा। [1]

If $x\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}$, then $(x+y)=$ ..... .

(ii) $\cos(\sqrt{x})$ का x के सापेक्ष अवकलन ..... है। [1]

The derivative of $\cos(\sqrt{x})$ with respect to x is ..... .

(iii) वक्र $y = 3x^4 - 4x$ के $x = 4$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता का मान ..... होगा। [1]
The slope of the tangent line at $x = 4$ to the curve $y = 3x^4 - 4x$ will be ..... .

(iv) $\int x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx$ का मान ..... होगा। [1]

The value of $\int x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx$ will be ..... .

(v) यदि बिन्दुओं A, B, C और D के निर्देशांक क्रमशः (1, 2, 3), (4, 5, 7), (–4, 3, –6) और (2, 9, 2) है, तो AB और CD रेखाओं के बीच का न्यून कोण ..... होगा। [1]
If the coordinates of the points A, B, C and D are then (1, 2, 3), (4, 5, 7), (–4, 3, –6) and (2, 9, 2) respectively, the acute angle between the lines AB and CD will be ..... .

(vi) यदि दो निष्पक्ष पासों की एक जोड़ी को एक बार उछाला जाता है, तो दोनों पासों पर अंकों का योग 5 होने की प्रायिकता का मान ..... होगा। [1]
If a pair of two unbiased dice is thrown one, then the probability that the sum of the numbers on both the dice is 5 will be ..... .

3. अति लघूत्तरात्मक प्रश्न :
Very short answer type questions :

(i) $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए। [1]

Find the principal value of $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

(ii) निम्नलिखित समीकरण से x तथा y के मानों को ज्ञात कीजिए: [1]

$$2\begin{bmatrix}x & 5\\7 & y-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -4\\1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 6\\15 & 14\end{bmatrix}$$

(iii) सारणिक $\begin{vmatrix}102 & 18 & 36\\1 & 3 & 4\\17 & 3 & 6\end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए। [1]

(iv) $x = 3$ पर फलन $f(x) = 2x^2 - 1$ के फलन के सांतत्य की जाँच कीजिए। [1]
Examine the continuity of the function $f(x) = 2x^2 - 1$ at $x = 3$.

(v) किसी उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय $R(x)$ रुपयों में $R(x) = 13x^2 + 26x + 15$ से प्रदत है। सीमांत आय ज्ञात कीजिए, जब $x = 7$ है। [1]
The total revenue in Rupees received from the sale of x units of a product is given by $R(x) = 13x^2 + 26x + 15$. find the marginal revenue, when $x = 7$.

(vi) प्रथम चतुर्थांश में वक्र $y^2 = 9x$; $x = 2$, $x = 4$ एवं x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [1]
Find the area of the region bounded by $y^2 = 9x$; $x = 2$, $x = 4$ and the x-axis in the first quadrant.

(vii) बिन्दुओं $P(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})$ और $Q(-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$ को मिलाने वाली रेखा को 2 : 1 के अनुपात में अन्तर विभाजित करने वाले बिन्दु R का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए। [1]

Find the position vector of a point R which internally divides the line joining two points P and Q whose position vectors are $(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})$ and $(-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$ respectively in the ratio 2 : 1.

(viii) सदिशों $\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$ और $3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। [1]

Find the angle between the vectors $\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$ and $3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$.

(ix) दर्शाइए कि बिन्दुओं (1, –1, 2) और (3, 4, –2) से होकर जाने वाली रेखा, बिन्दुओं (0, 3, 2) और (3, 5, 6) से जाने वाली रेखा पर लंब है। [1]

Show that the line through the points (1, –1, 2) and (3, 4, –2) is perpendicular to the line through the points (0, 3, 2) and (3, 5, 6).

(x) एक रेखा का कार्तीय समीकरण $\frac{x-5}{3}=\frac{y+4}{7}=\frac{z-6}{2}$ है। इसका सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए। [1]

The cartesian equation of a line is $\frac{x-5}{3}=\frac{y+4}{7}=\frac{z-6}{2}$. Write its vector form.

(xi) समतल $2x + y - z = 5$ द्वारा निर्देशी अक्षों पर काटे गए अंतः खंडों को ज्ञात कीजिए। [1]

Find the intercepts cut off by the plane $2x + y - z = 5$ on co-ordinate axes.

(xii) एक अनभिनत (unbiased) पासे को दो बार उछाला गया। मान लें A घटना 'पहली उछाल पर विषम संख्या प्राप्त होना' और B घटना 'द्वितीय उछाल पर विषम संख्या प्राप्त होना' दर्शाते हैं। घटनाओं A और B के स्वातंत्र्य का परीक्षण कीजिए। [1]

An unbiased die is thrown twice. Let the event A be 'odd number on the first thrown and B the event 'odd number on the second throw'. Check the independence of the events A and B.

खण्ड-ब (Section–B)

लघूत्तरीय प्रश्न :

Short answer type questions :

4. यदि $f(x)=\frac{(4x+3)}{(6x-4)}, x\neq\frac{2}{3}$, तो सिद्ध कीजिए की सभी $x\neq\frac{2}{3}$ के लिए $(f\circ f)(x)=x$ है। [2]

If $f(x)=\frac{(4x+3)}{(6x-4)}, x\neq\frac{2}{3}$, show that $(f\circ f)(x)=x$ for all $x\neq\frac{2}{3}$.

5. यदि $A=\begin{bmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ -\cos\alpha & \sin\alpha\end{bmatrix}$ हो, तो सत्यापित कीजिए **A'A = I** [2]

If $A=\begin{bmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ -\cos\alpha & \sin\alpha\end{bmatrix}$, then verify that A'A = I.

6. सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix}-a^2 & ab & ac\\ ba & -b^2 & bc\\ ca & cb & -c^2\end{vmatrix}=4a^2b^2c^2$. [2]

7. दर्शाइए कि बिन्दु A$(a, b + c)$, B$(b, c + a)$ और C$(c, a + b)$ संरेख हैं। [2]

Show that the points A$(a, b + c)$, B$(b, c + a)$ and C$(c, a + b)$ are collinear.

8. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x)=\begin{cases}x^2+3, \text{ यदि } x\neq 0\\ 1, \text{ यदि } x=0\end{cases}$ $x=0$ पर संतत नहीं है। [2]

Prove that the function f given by $f(x)=\begin{cases}x^2+3, \text{if } x\neq 0\\ 1, \text{if } x=0\end{cases}$ is not continuous at $x = 0$.

9. अंतराल ज्ञात कीजिए जिसमें $f(x) = x^2 - 4x + 6$ से प्रदत्त फलन f
   i) वर्धमान है
   ii) ह्रासमान है [2]
   Find the intervals in which the function f given by $f(x) = x^2 - 4x + 6$ is
   i) Increasing
   ii) Decreasing

10. x मीटर भुजा वाले घन की भुजा में 2% की वृद्धि के कारण से घन के आयतन में सन्निकट परिवर्तन ज्ञात कीजिए। [2]
    Find the approximate change in the volume of a cube of side x meter caused by increasing the side by 2%.

11. $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x + 4}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। [2]

12. परवलय $y^2 = 4ax$ और उसके नाभिलंब से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [2]
    Find tha area of the region bounded by the parabola $y^2 = 4ax$ and its latus rectum.

13. y-अक्ष को मूल बिन्दू पर स्पर्श करने वाले वृत्तों के कुल का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए। [2]
    Form the differential equation of the family of circles touching the y-axis at origin.

14. दिए हुए सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ और $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ के लिए सदिश $\vec{a} + \vec{b}$ के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए। [2]

    For given vectors, $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ and $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, find the unit vector in the direction of the vector $\vec{a} + \vec{b}$.

15. समतलों, जिनके सदिश समीकरण $\vec{r}.\left(2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}\right) = 5$ और $\vec{r}.\left(3\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}\right) = 3$ है, के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। [2]

    Find the angle between the planes whose vector equations are $\vec{r}.\left(2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}\right) = 5$ and $\vec{r}.\left(3\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}\right) = 3$.

16. यदि एक न्याय सिक्के को 10 बार उछाला गया, तो ठीक छः चित आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। [2]
    If a fair coin is tossed 10 times, find the probability of exactly six heads.

खण्ड-स (Section–C)

17. यदि $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5} + \cos^{-1}x\right) = 1$, तो x का मान ज्ञात कीजिए। [3]

    अथवा/OR

    दर्शाइए कि $\sin^{-1}\frac{3}{5} - \sin^{-1}\frac{8}{17} = \cos^{-1}\frac{84}{85}$.

18. x के सापेक्ष $(\log x)^{\cos x}$ का अवकलन कीजिए। [3]
    Differentiate $(\log x)^{\cos x}$ with respect to x.

    अथवा/OR

    यदि $y = 500e^{7x} + 600e^{-7x}$ है, तो दर्शाइए कि $\frac{d^2y}{dx^2} = 49y$.

19. $\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। [3]

    अथवा/OR

    $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

20. दर्शाइए कि सदिश $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}, \hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ और $3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्षों की रचना करते हैं। [3]

Show that the vectors $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}, \hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ and $3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$ form the vertices of a right angled triangle.

अथवा/OR

एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसके शीर्ष A(1, 1, 1), B(1, 2, 3) और C(2, 3, 1) हैं।

Find the area of a triangle having the points A(1, 1, 1), B(1, 2, 3) and C(2, 3, 1) as its vertices.

खण्ड-द (Section–D)

21. $\int_{-1}^{1} 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए। [4]

अथवा/OR

$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

22. किसी बैंक में मूलधन की वृद्धि 5% वार्षिक की दर से होती है। इस बैंक में रु. 1,000 जमा कराये जाते हैं। ज्ञात कीजिए कि 10 वर्ष बाद यह राशि कितनी हो जायेगी ($e^{0.5} = 1.648$)। [4]

In a bank, principal increases continuously at the rate of 5% per year. An amount of Rs. 1,000 is deposited with this bank. How much will it worth after 10 years ($e^{0.5} = 1.648$).

अथवा/OR

अवकल समीकरण $y\,dx - (x + 2y^2)\,dy = 0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिये।

Find the general solution of the differential equation $y\,dx - (x + 2y^2)\,dy = 0$.

23. निम्नलिखित व्यवरोधों के अंतर्गत $Z = 5x + 3y$ का आलेखीय विधि से अधिकतमीकरण कीजिए। [4]

$3x + 5y \leq 15$, $5x + 2y \leq 10$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

Maximize $Z = 5x + 3y$ subject to constraints $3x + 5y \leq 15$, $5x + 2y \leq 10$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ by using graphical method.

अथवा/OR

निम्नलिखित व्यवरोधों के अंतर्गत $Z = 200x + 500y$ का आलेखीय विधि से न्यूनतमीकरण कीजिए।

$x + 2y \geq 10$, $3x + 4y \leq 24$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Minimize $Z = 200x + 500y$ subject to constraints $x + 2y \geq 10$, $3x + 4y \leq 24$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ by using graphical method.

गणित भाग-2 (कक्षा-12)

समाकलन
(INTEGRALS)

7

अध्याय

7.1 परिचय (Introduction)
7.2 समाकलन-अचर (The Constant of Integration)
7.3 समाकलन के प्रमेय (Theorems on Integration)
7.4 समाकलन के मानक सूत्र (Standard Formulae of Integration)
7.5 समाकलन की विधियाँ (Methods of Integration)
7.6 कुछ विशिष्ट फलनों के समाकलन (Integrals of Some Particular Functions)
7.7 आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन (Integration by Partial Fractions)
7.8 खंडशः समाकलन (Integration by Parts)
7.9 निश्चित समाकलन (Definite Integrals)
7.10 कलन की आधारभूत प्रमेय (Fundamental Theorem of Calculus)
7.11 प्रतिस्थापन द्वारा निश्चित समाकलनों का मान ज्ञात करना (Evaluation of Definite Integrals by Substitution)
7.12 निश्चित समाकलनों के कुछ गुणधर्म (Some Properties of Definite Integrals)

7.1 परिचय (INTRODUCTION)

☆ यदि हम समाकलन गणित (Integral Calculus) के इतिहास का अध्ययन करें तो हमें ज्ञात होगा कि इसकी खोज समतल में रेखाओं तथा वक्रों (Curves) द्वारा परिबद्ध (bounded) समतल क्षेत्रों के क्षेत्रफलों को ज्ञात करने के लिए की गई थी। इसकी धारणा ऐसी श्रेणी के योगफल की सीमा पर आधारित थी जिसमें पदों की संख्या अनन्त थी और प्रत्येक पद शून्य की ओर अग्रसर था। इसका अध्ययन इस दृष्टि से हम अध्याय-8 में करेंगे। बाद में यह देखा गया कि **समाकलन की प्रक्रिया** (Process of Integration), **अवकलन** (Differentiation) **की प्रतिलोम** (Inverse) **प्रक्रिया** है।

☆ अवकलन गणित में हमें दिये गये फलन का अवकलन गुणांक या अवकलन ज्ञात करना होता है, जबकि समाकलन गणित में हमें वह फलन ज्ञात करना होता है जिसका अवकल गुणांक दिया होता है। अतः वह प्रक्रिया (Process) जिसके द्वारा किसी दिये हुए फलन $f(x)$ से वह फलन माना $F(x)$, ज्ञात करना जिसका अवकल गुणांक $\frac{d}{dx}\{F(x)\}$ = फलन $f(x)$ हो, **समाकलन** (Integration) कहलाती है। स्पष्टतः समाकलन की यह प्रक्रिया **अवकलन की प्रतिलोम प्रक्रिया है तथा इसे प्रति-अवकलन** (Anti-derivatives) **भी कहते हैं,** अर्थात् यदि

$$\frac{d}{dx}\{F(x)\} = f(x)$$

तो $F(x)$, दिये हुए फलन $f(x)$ का x सापेक्ष समाकलन कहलाता है। इसे संकेतन रूप (Symbolically) में निम्न प्रकार से व्यक्त किया जाता है-$\int f(x)dx = F(x)$ जहाँ पर संकेत $\int$ (जो कि अंग्रेजी अक्षर S, जिसका प्रयोग योग के लिए किया जाता है, का एक बढ़ा हुआ रूप है) का प्रयोग समाकलन के लिए किया जाता है तथा dx में अक्षर x, उस चर (Variable) को व्यक्त करता है जिसके सापेक्ष हमें समाकलन करना है फलन $f(x)$ जिसका हमें समाकलन करना होता है, उसे समाकल्य (Integrand) कहते हैं तथा $F(x)$ की **समाकल** (Integral) कहते हैं। अतः

$$\int f(x)dx = F(x)$$

समाकल्य (Integrand) — समाकल (Integral)

समाकलन (Integration)

☞ **उदाहरणार्थ—**

(i) चूँकि $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ $\therefore \int \cos x dx = \sin x$

(ii) चूँकि $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ $\therefore \int \sec^2 x dx = \tan x$

(iii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^5}{5}\right) = x^4$ $\therefore \int x^4 dx = \frac{x^5}{5}$

(iv) $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{3x}}{3}\right) = e^{3x} \quad \therefore \int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3}$

7.2 समाकलन-अचर (THE CONSTANT OF INTEGRATION)

☆ हम जानते हैं कि किसी भी अचर फलन का अवकल गुणांक शून्य होता है। अर्थात्

$$\frac{d}{dx}(c) = 0,$$ जहाँ c एक अचर फलन है।

अब यदि $\frac{d}{dx}\{F(x)\} = f(x)$

तब $$\frac{d}{dx}\{F(x) + c\} = \frac{d}{dx}\{F(x)\} + \frac{d}{dx}(c)$$
$$= f(x) + 0$$
$$= f(x)$$

अतः समाकलन की परिभाषा से

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

☆ यहाँ पर c, **समाकलन-अचर** (The Constant of Integration) कहलाता है तथा चर x से स्वतंत्र (Independent) होता है। c के अलग-अलग मान रखने पर दिये हुये फलन $f(x)$ के **भिन्न-भिन्न** समाकल प्राप्त होते हैं जिनमें केवल अचर पद का ही अन्तर होता है। अतः $F(x) + c$, फलन $f(x)$ का व्यापक समाकल कहलाता है।

☆ व्यापक समाकल में c निश्चित नहीं होता। c की अनिश्चितता के कारण यह अनिश्चित समाकल (Indefinite Integral) भी कहलाता है।

☞ **उदाहरणार्थ-**

(i) चूँकि $\frac{d}{dx}(\tan x + c) = \sec^2 x$

$$\therefore \int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$$

(ii) चूँकि $\frac{d}{dx}(e^x + c) = e^x$

$$\therefore \int e^x dx = e^x + c$$

(iii) चूँकि $\frac{d}{dx}(\sin x + c) = \cos x$

$$\therefore \int \cos x\,dx = \sin x + c$$

☆ **टिप्पणी :** छात्रों को अनिश्चित समाकलन की प्रत्येक समस्या में समाकलन की प्रक्रिया के अन्त में समाकलन-अचर लिखने का अभ्यास होना चाहिए। यह समाकलन की प्रक्रिया के बाद अन्त में जोड़ा जाता है। सुविधा के लिए हम इसे बार-बार नहीं लिखते।

7.3 समाकलन के प्रमेय (THEOREMS ON INTEGRATION)

☆ **प्रमेय-1 :** यदि समाकलन-अचर हटा दिया जाये, तो

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x)$$

उपपत्ति : माना कि

$$\frac{d}{dx}\{F(x)\} = f(x) \quad \ldots.(1)$$

तो समाकलन की परिभाषानुसार

$$\int f(x)dx = \{F(x) + c\} \quad \ldots.(2)$$

जहाँ c एक अचर है।

समीकरण (2) के दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = \frac{d}{dx}\{F(x)+c\}$$
$$= \frac{d}{dx}\{F(x)\} + \frac{d}{dx}(c)$$
$$= f(x) + 0 \text{ [समी. (1) से]}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x)$$

इस प्रमेय से यह सिद्ध होता है कि समाकलन की प्रक्रिया, अवकलन की प्रतिलोम (Inverse) प्रक्रिया है।

☆ **प्रमेय-2 :** एक अचर तथा फलन के गुणनफल का समाकल उस अचर तथा फलन के समाकल के गुणनफल के बराबर होता है, अर्थात्

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

जहाँ k अचर है।

उपपत्ति-अवकलन गणित के प्रमेय से हम जानते हैं कि—

$$\frac{d}{dx}\left[k\int f(x)dx\right] = k\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]$$
$$= kf(x) \text{ [प्रमेय 1 से]}$$

अतः समाकलन की परिभाषानुसार

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

☆ **प्रमेय-3 :**

$$\int\{f_1(x) \pm f_2(x)\}dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

अर्थात् दो फलनों के योग व अन्तर का समाकल उनके समाकलों के योग व अन्तर के बराबर होता है।

उपपत्ति—

माना $\int f_1(x)dx = \phi_1(x) \quad \ldots.(1)$

तथा $\int f_2(x)dx = \phi_2(x) \quad \ldots.(2)$

अतः $\frac{d}{dx}\phi_1(x) = f_1(x)$ तथा $\frac{d}{dx}\phi_2(x) = f_2(x)$

$$\therefore \frac{d}{dx}\{\phi_1(x) \pm \phi_2(x)\} = \frac{d}{dx}\phi_1(x) \pm \frac{d}{dx}\phi_2(x)$$
$$= f_1(x) \pm f_2(x)$$

समाकलन करने पर

$$\phi_1(x) \pm \phi_2(x) = \int \{f_1(x) \pm f_2(x)\}dx$$

या $\int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx = \int \{f_1(x) \pm f_2(x)\}dx$

[समीकरण (1) व (2) से]

इस प्रमेय को परिमित संख्या के पदों के समाकल के लिए भी

प्रयोग कर सकते हैं।

$\therefore \int \{f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x)\} \pm \ldots\ldots\ldots \pm f_n(x)\}dx$
$= \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \int f_3(x)dx \pm \ldots\ldots \pm \int f_n(x)dx$

इस प्रकार समाकलन संक्रिया परिमित संख्या के पदों पर बंटित होती है।

☆ **टिप्पणी**-(i) इस प्रमेय को पद प्रति पद समाकलन का नियम कहते हैं।
(ii) इस नियम का अनन्त पदों के योग के समाकल पर लागू होना आवश्यक नहीं है।

☆ **व्यापीकरण**

$\int a\, f_1(x)dx \pm \int b\, f_2(x)dx = a \int f_1(x)dx \pm b \int f_2(x)dx$

7.4 समाकलन के मानक सूत्र (STANDARD FORMULAE OF INTEGRATION)

☆ अवकलन गणित के मानक सूत्रों में केवल मात्र परिभाषा का प्रयोग करने से ही समाकलन के लिये अनेक संगत सूत्र प्राप्त किये जा सकते हैं। ऐसा निम्न सारणी में दर्शाया गया है :

	अवकलज सूत्र	संगत समाकल सूत्र
1.	$\frac{d}{dx}(c) = 0, c$ अचर है	$\int 0\, dx = c,$ अचर
2.	$\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = n\, x^{n-1}, n \neq 0$ या $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n,\ n \neq -1$	$\int nx^{n-1}dx = x^n + c, n \neq 0$ या $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$
3.	$\frac{d}{dx}\left(\log\lvert x\rvert\right) = \frac{1}{x}, x \neq 0$	$\int \frac{1}{x} dx = \log\lvert x\rvert + c,\ x \neq 0$
4.	$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\int e^x dx = e^x + c$
5.	$\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log_e a}\right) = a^x, a > 0, a \neq 1$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a} + c = a^x \log_a e + c, a > 0, a \neq 1$
6.	$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ जहाँ x रेडियन में है।	$\int \cos x\, dx = \sin x + c$ जहाँ x रेडियन में है।
7.	$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$	$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$
8.	$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$
9.	$\frac{d}{dx}(-\cot x) = \text{cosec}^2 x = \csc^2 x$	$\int \text{cos ec}^2 x\, dx = \int \csc^2 x\, dx = -\cot x + c$
10.	$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$
11.	$\frac{d}{dx}(-\text{cosec } x) = \text{cosec } x \cot x$	$\int \text{cos ec}\, x \cot x\, dx = -\text{cos ec}\, x + c$
12.	$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\lvert x\rvert < 1)$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c = \arcsin x + c,\ (\lvert x\rvert < 1)$

13.	$\frac{d}{dx}(-\cos^{-1}x) = \frac{d}{dx}(-\arccos x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\cos^{-1}x + c$
14.	$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{d}{dx}(-\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}x + c = \arctan x + c$
15.	$\frac{d}{dx}\left(-\cot^{-1}x\right) = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = -\cot^{-1}x + C$
16.	$\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1}x\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\sec^{-1}x + C$
17.	$\frac{d}{dx}\left(-\operatorname{cosec}^{-1}x\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\operatorname{cosec}^{-1}x + C$
18.	$\frac{d}{dx}\lvert x\rvert = \frac{\lvert x\rvert}{x},\ x \neq 0$	$\int \frac{\lvert x\rvert}{x}dx = \lvert x\rvert + c,\ (x \neq 0)$

☆ **टिप्पणी**-ऊपर दिये गये हर सूत्र में समाकलन-अचर (Constant of Integration) c जोड़ा जाना चाहिये।

☆ **संक्षिप्त रूप :** cosec x = csc x . arcsin = $\sin^{-1}$ इत्यादि।

हल सहित उदाहरण (SOLVED EXAMPLES)

☞ **उदाहरण 1.** निरीक्षण विधि का उपयोग करते हुए निम्नलिखित फलनों का प्रतिअवकलज ज्ञात कीजिये—

(i) $\cos 2x$

(ii) $3x^2+4x^3$ **(माध्य. शिक्षा बोर्ड, मॉडल पेपर, 2022-23)**

(iii) $\frac{1}{x},\ x \neq 0$ **(NCERT)**

हल—(i) यहाँ पर हम ऐसे फलन को ज्ञात करना चाहते हैं जिसका अवकलज $\cos 2x$ है

हम जानते हैं कि

$$\frac{d}{dx}(\sin 2x) = 2\cos 2x$$

या $$\cos 2x = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\sin 2x)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)$$

अतः $\cos 2x$ का एक प्रतिअवकलज $\frac{1}{2}\sin 2x$ है।

(ii) यहाँ पर हम ऐसे फलन को ज्ञात करना चाहते हैं जिसका अवकलज $3x^2 + 4x^3$ है।

अब $$\frac{d}{dx}\left(x^3 + x^4\right) = 3x^2 + 4x^3$$

$\therefore$ $3x^2 + 4x^3$ का प्रतिअवकलज $x^3 + x^4$ है।

(iii) यहाँ पर हम एक ऐसे फलन को ज्ञात करना चाहते हैं जिसका अवकलन $\frac{1}{x}$ है।

इसलिये $$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x},\ x > 0$$

और $$\frac{d}{dx}[\log(-x)] = \frac{1}{-x}(-1)$$

$$= \frac{1}{x},\ x > 0$$

इन दोनों को एक साथ लेने पर हम पाते हैं

$$\frac{d}{dx}(\log |x|) = \frac{1}{x},\ x \neq 0$$

इसलिये

$$\int \frac{1}{x}dx = \log |x|,$$

जो कि $\frac{1}{x}$ के प्रतिअवकलजों में से एक है।

☞ **उदाहरण 2.** निम्नलिखित समाकल का मान ज्ञात कीजिये-

$$\int \frac{2\cos x}{3\sin^2 x}dx$$

हल—यहाँ $$\int \frac{2\cos x}{3\sin^2 x}dx = \int \frac{2\cos x}{3\sin x \cdot \sin x}dx$$

$$= \frac{2}{3}\int \cot x.\operatorname{cosec} x\ dx$$