NCERT के पूर्णतया संशोधित नवीनतम् पाठ्यक्रम पर आधारित

संजीव®

गणित

कक्षा-12 (भाग-1)

माध्यमिक शिक्षा बोर्ड, राजस्थान के विद्यार्थियों के लिए

लेखक :

एस. सी. गुप्ता
एम.एससी., एम.एड.
वरिष्ठ व्याख्याता गणित
राजकीय आदर्श उच्च माध्यमिक विद्यालय
सुजानपुरा, बस्सी (जयपुर)

डॉ. आर. वाधवानी
एम.एससी., एम.फिल., पीएच.डी.

2025

मूल्य : ₹ 440/-

संजीव प्रकाशन

जयपुर-3

- प्रकाशक :

  संजीव प्रकाशन

  धामाणी मार्केट, चौड़ा रास्ता,

  जयपुर-3

  email : sanjeevprakashanjaipur@gmail.com
  website : www.sanjivprakashan.com

- **मूल्य : ₹ 440.00**

- लेजर कम्पोजिंग :

  संजीव प्रकाशन (D.T.P. Department), जयपुर

- मुद्रक :

  मनोहर आर्ट प्रिन्टर्स, जयपुर

  *****

प्रस्तावना

ज्ञान एवं विज्ञान में तीव्र गति से हो रही वृद्धि को ध्यान में रखते हुए प्रस्तुत पुस्तक **'गणित भाग-1'** का यह संस्करण राजस्थान बोर्ड द्वारा स्वीकृत **कक्षा-12 के नवीनतम संशोधित N.C.E.R.T. पाठ्यक्रमानुसार** लिखा गया है। प्रस्तुत सन्दर्भ पुस्तक इस कक्षा में में आने वाले विज्ञान, वाणिज्य एवं कला वर्ग के विद्यार्थियों के स्तर को ध्यान में रखकर लिखी गयी है। पुस्तक में विगत वर्षों में विभिन्न प्रतियोगी परीक्षाओं में पूछे गये प्रश्न हल सहित दिये गये हैं।

पुस्तक का निर्माण करते समय इस बात का विशेष ध्यान रखा गया है कि पुस्तक की विषय-सामग्री एवं सिद्धान्तों को सरल भाषा में प्रस्तुत कर छात्रों की विषय के प्रति रुचि पैदा हो। N.C.E.R.T. के सभी प्रश्नों का हल पुस्तक में समायोजित है।

प्रस्तुत संस्करण की निम्न विशेषताएँ हैं—

1. विषय-वस्तु की भाषा-शैली को सरल-सहज व पूर्ण रूप से राजस्थान राज्य के अनुरूप रखा गया है जिससे कि विद्यार्थी ज्ञान को आसानी से समाहित कर सकें।
2. विभिन्न गणितीय सूत्रों का समावेश।
3. महत्त्वपूर्ण तथ्यों का समावेश।
4. पुस्तक में आवश्यकतानुसार हल सहित उदाहरण, प्रत्येक विषय-वस्तु के साथ दिये गये हैं, जिससे विद्यार्थी गणित विषय के सिद्धान्तों के अनुप्रयोगों को आसानी से समझ सकें।
5. NCERT के सभी प्रश्नों का हल पुस्तक के प्रत्येक अध्याय में समायोजित है।
6. प्रत्येक अध्याय के अन्त में **महत्त्वपूर्ण प्रश्न (वस्तुनिष्ठ, रिक्त स्थान, अतिलघूत्तरात्मक, लघूत्तरात्मक एवं निबन्धात्मक) हल सहित दिये गये हैं,** जिससे विद्यार्थी में आत्मविश्वास उत्पन्न हो।
7. प्रत्येक अध्याय के अन्त में **विभिन्न प्रतियोगी परीक्षाओं में पूछे गये बहुविकल्पीय प्रश्नों *को भी हल सहित*** दिया गया है।

हमारे द्वारा भरसक प्रयास किया गया है कि यह पुस्तक विद्यार्थियों, अध्यापकों की आवश्यकताओं की पूर्ति करेगी तथा उनके लिए लाभदायक सिद्ध होगी।

आशा है कि यह पुस्तक C.B.S.E. के हिन्दी माध्यम के विद्यार्थियों के लिये भी मददगार सिद्ध होगी।

पुस्तक का नवीनतम संशोधित संस्करण नये कलेवर में प्रस्तुत किया जा रहा है। इसमें विषय विशेषज्ञों, शिक्षकों तथा पाठकों से प्राप्त बहुमूल्य सुझावों को भी उचित स्थान दिया गया है।

हम उन सभी विद्वानों, लेखकों के आभारी हैं जिनसे हमें निरन्तर प्रेरणा एवं मार्गदर्शन प्राप्त होते रहे हैं।

इस पुस्तक के प्रकाशन हेतु हम संजीव प्रकाशन के भी अत्यन्त आभारी हैं जिनके अथक तथा सतत प्रयासों से इस पुस्तक का प्रकाशन हो पाया है।

लेखक अपने परिश्रमपूर्ण प्रयास को तभी सफल मानेंगे जब यह पुस्तक सम्बन्धित छात्रों के लिए अधिक से अधिक लाभदायक सिद्ध होगी। प्रस्तुत पुस्तक को और अधिक उपयोगी बनाने हेतु शिक्षकों एवं पाठकगण के बहुमूल्य सुझावों का सहर्ष स्वागत किया जायेगा। अत: हम उनके आभारी रहेंगे।

लेखक

एस.सी. गुप्ता

डॉ. आर. वाधवानी

विषय-सूची

गणित भाग-1 (कक्षा-12)

सम्बन्ध एवं फलन
(RELATIONS AND FUNCTIONS)

1 अध्याय

1.1 भूमिका (INTRODUCTION)

☆ कक्षा XI में हम समुच्चय, उपसमुच्चय, कार्तीय गुणन, सम्बन्ध, प्रान्त व सहप्रान्त, सम्बन्ध का परिसर, फलन, फलन का प्रान्त, सहप्रान्त तथा परिसर का विस्तार से अध्ययन कर चुके हैं। इस अध्याय में कक्षा XI की उपरोक्त परिभाषाओं का प्रत्यास्मरण कर सम्बन्धों तथा फलनों के प्रकारों का विस्तार से अध्ययन करेंगे।

1.2 क्रमित युग्म (ORDERED PAIR)

☆ सामान्यत: समुच्चय के अवयवों के क्रम में परिवर्तन करने पर समुच्चय में कोई भी परिवर्तन नहीं होता। जैसे $\{1, 2\} = \{2, 1\}$ लेकिन यदि किसी समुच्चय में अवयवों के क्रम का भी महत्व हो तो ऐसे समुच्चय को क्रमित समुच्चय (ordered set) कहते हैं। इसी प्रकार यदि दो अवयवों वाले समुच्चय $\{a, b\}$ में a का पहला स्थान तथा b का दूसरा स्थान निर्धारित कर दिया जाये तो यह समुच्चय **क्रमित युग्म** (Ordered Pair) कहलाता है तथा इसे संकेत (a, b) द्वारा व्यक्त किया जाता है। यहाँ $(a, b) \neq (b, a)$ परिभाषा से स्पष्ट है कि

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ तथा } b = d$$

☆ यदि किसी क्रमित समुच्चय में अवयवों की संख्या n हो तो ऐसे समुच्चय को क्रमित n — ट्युपुल (Ordered n—tuple) कहा जाता है तथा इसे $(a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots a_n)$ से व्यक्त करते हैं। जैसे—द्विविमीय निर्देशांक (x, y) तथा त्रिविमीय निर्देशांक (x, y, z) में क्रम का महत्व है।

1.3 दो समुच्चयों का कार्तीय गुणन (CARTESIAN PRODUCT OF TWO SETS)

☆ दो समुच्चयों A और B का कार्तीय गुणन उन क्रमित युग्मों (a, b) का समुच्चय होता है जिनका पहला अवयव a, समुच्चय A का अवयव हो तथा दूसरा अवयव b, समुच्चय B का अवयव हो। इस गुणन को संकेत $A \times B$ द्वारा व्यक्त किया जाता है अत:

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$

☆ परिभाषा से स्पष्ट है कि $A \times B \neq B \times A$ जब तक कि A और B बराबर न हों।

☞ **उदाहरण—**यदि $A = \{p, q, r\}$ तथा $B = \{x, y\}$ हो तो

$A \times B = \{(p, x), (p, y), (q, x), (q, y), (r, x), (r, y)\}$

$B \times A = \{(x, p), (y, p), (x, q), (y, q), (x, r), (y, r)\}$

☆ **टिप्पणियाँ—**

(i) यदि $A = \phi$ अथवा $B = \phi$, तब $A \times B = \phi$ यहाँ ϕ रिक्त समुच्चय है।

(ii) यदि $A = \phi$ तथा $B = \phi$, तब $A \times B = \phi$

(iii) यदि समुच्चय A में अवयवों की संख्या m तथा समुच्चय B में अवयवों की संख्या n हो तो $A \times B$ में $m \times n$ अवयव होंगे अत: इसके अरिक्त उपसमुच्चयों की संख्या $2^{mn} - 1$ होगी।

(iv) यदि A तथा B अरिक्त समुच्चय हों तथा उनमें से एक अथवा दोनों अपरिमित समुच्चय हों तो $A \times B$ में अवयवों की संख्या अनन्त होगी अर्थात् $A \times B$ भी एक अपरिमित समुच्चय होगा।

(v) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(vi) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(vii) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

(viii) $A \subseteq B \Rightarrow A \times C \subseteq B \times C$

(ix) $A \subseteq B, C \subseteq D \Rightarrow (A \times C) \subseteq (B \times D)$

1.4 सम्बन्ध (RELATION)

☆ समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित सम्बन्ध R, कार्तीय गुणन $A \times B$ का कोई उपसमुच्चय होता है। अर्थात् $R \subseteq A \times B$। इसे प्राय: निम्न प्रकार से लिखते हैं—

$$R = \{(x, y) \mid xRy, x \in A, y \in B\}$$

☆ a और b सम्बन्ध R द्वारा सम्बन्धित हैं तो इस तथ्य को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं—

$$a \; R \; b \text{ या } (a,b) \in R$$

☆ a और b सम्बन्ध R द्वारा सम्बन्धित नहीं हैं तो तथ्य को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं—

$$a \not R b \text{ या } (a, b) \notin R$$

☞ **उदाहरण 1.** यदि $A = \{3, 5, 7, 9,\}$, $B = \{4, 6, 8, 10\}$ तथा $P(x,y) = x, y$ से छोटा है, तब

$$R = \{A, B, P(x, y)\}$$

A से B में एक सम्बन्ध है। इस सम्बन्ध के अन्तर्गत 3R4, 3R6, 3R8, 3R10, 5R6, 5R8, 5R10, 7R8, 7R10, 9R10, लेकिन $5 \not R 4$, $7 \not R 4$, $7 \not R 6$, $9 \not R 4$, $9 \not R 6$, $9 \not R 8$,

इसे हम इस प्रकार से भी व्यक्त कर सकते हैं—

$(3,4) \in R$, $(3,6) \in R$, $(3,8) \in R$, $(3,10) \in R$, $(5,6) \in R$, $(5,8) \in R$, $(5,10) \in R$, $(7,8) \in R$, $(7,10) \in R$, $(9,10) \in R$, परन्तु $(5,4) \notin R$, $(7,4) \notin R$, $(7,6) \notin R$, $(9,4) \notin R$, $(9,6) \notin R$, $(9,8) \notin R$ इत्यादि। तब $R = \{(3, 4), (3, 6), (3, 8), (3, 10), (5, 6), (5, 8), (5, 10), (7, 8), (7, 10), (9, 10)\}$

☞ **उदाहरण 2.** यदि $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{3, 6, 8\}$ तथा $P(x,y) = x,y$ का भाजक है, तब

$$R = \{A, B, P(x,y)\}$$

A से B में एक सम्बन्ध है। इस सम्बन्ध के अन्तर्गत 2R6, 2R8, 3R3, 3R6, 4R8 लेकिन $2 \not R 3$, $3 \not R 8$, $4 \not R 3$, $4 \not R 6$, अर्थात् $(2, 6) \in R$, $(2, 8) \in R$, $(3, 3) \in R$, $(3, 6) \in R$, $(4, 8) \in R$, परन्तु $(2, 3) \notin R$, $(3, 8) \notin R$, $(4, 3) \notin R$, $(4, 6) \notin R$ इत्यादि।

☞ **उदाहरण 3.** यदि $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 4, 6, 9\}$ तथा $P(x,y) : x$ का दुगना y है तब $R = \{A, B, P(x, y)\}$ A से B में एक सम्बन्ध है जिसके अन्तर्गत 2R4, 3R6 लेकिन $1 \not R 4$, $3 \not R 9$ इत्यादि। इसे हम इस प्रकार भी व्यक्त कर सकते हैं— $(2, 4) \in R$, $(3, 6) \in R$, परन्तु $(1, 4) \notin R$, $(3, 9) \notin R$ इत्यादि।

☆ **टिप्पणी—**उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि

(i) यह आवश्यक नहीं है कि A के प्रत्येक अवयव का सम्बन्ध B के किसी न किसी अवयव से हो अर्थात् A में ऐसे अवयव हो सकते हैं जो B के किसी अवयव से सम्बन्धित नहीं हों।

(ii) A के किसी अवयव का सम्बन्ध B के एक या अधिक अवयवों से हो सकता है।

(iii) A के एक से अधिक अवयवों का सम्बन्ध B के एक अवयव से हो सकता है।

(iv) A के किसी भी अवयव का सम्बन्ध B के किसी भी अवयव से नहीं भी हो सकता है।

(v) A के सभी अवयवों का सम्बन्ध B के सभी अवयवों से हो सकता है।

☆ **नोट—**यदि A तथा B में अवयवों की संख्या क्रमश: m तथा n हो तो $A \times B$ में अवयवों की संख्या $m \times n$ होगी। इसके अरिक्त

उपसमुच्चयों की संख्या $2^{mn} - 1$ होगी। अर्थात् A से B में परिभाषित होने वाले अरिक्त सम्बन्धों की संख्या भी $2^{mn} - 1$ होगी।

1.5 सम्बन्ध का प्रान्त तथा परिसर (DOMAIN AND RANGE OF A RELATION)

☆ यदि R, समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित कोई सम्बन्ध हो, तो R के क्रमित युग्मों के प्रथम अवयवों के समुच्चय को सम्बन्ध R का प्रान्त (Domain) तथा द्वितीय अवयवों के समुच्चय को सम्बन्ध R का परिसर (Range) कहते हैं। अत:

R का प्रान्त = $\{a|(a,b)\in R\}$

R का परिसर = $\{b|(a,b)\in R\}$

उपर्युक्त से स्पष्ट है कि R का प्रान्त A का उपसमुच्चय तथा R का परिसर B का उपसमुच्चय होगा।

☞ **उदाहरण 1.** यदि $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B=\{3, 5, 9\}$ तथा A से B में एक सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित है कि $xRy \Leftrightarrow$ x,y से बड़ा है, तब

$$R = \{(4, 3), (6, 3), (6, 5), (8, 3), (8, 5)\}$$

उपर्युक्त सम्बन्ध में

R का प्रान्त = $\{4, 6, 8\}$

R का परिसर = $\{3, 5\}$

☞ **उदाहरण 2.** यदि $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ तथा
$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

माना $R = \{(a,b)|\ a\in A,\ b\in B,$ a,b का भाजक है$\}$

A से B में एक सम्बन्ध हो तब

$R = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (1, 10), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 10), (3, 6), (4, 4), (4, 8), (5, 10)\}$

अत: R का प्रान्त = $\{1, 2, 3, 4, 5\} = A$

R का परिसर = $\{2, 4, 6, 8, 10\} = B$

☞ **उदाहरण 3.** Z में परिभाषित एक सम्बन्ध

$R = \{(x,y)|\ x,y \in Z,\ x^2 + y^2 \leq 4\}$

तब R का प्रान्त = $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

तथा R का परिसर = $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

☞ **उदाहरण 4.** यदि N पर $R = \{(x, y) : x + 2y = 8\}$ एक सम्बन्ध है, तो R का परिसर लिखिए।

हल—यहाँ $xRy \Leftrightarrow x + 2y = 8$

$$\Leftrightarrow y = \frac{8-x}{2},\ x\in N,\ y\in N$$

जब $x = 2,\ y = \frac{8-2}{2} = 3\in N$

$x = 4,\ y = \frac{8-4}{2} = 2\in N$

$x = 6,\ y = \frac{8-6}{2} = 1\in N$

$x = 8,\ y = \frac{8-8}{2} = 0\notin N$

अत: R का परिसर = $\{1, 2, 3\}$ **उत्तर**

1.6 प्रतिलोम सम्बन्ध (INVERSE RELATION)

☆ माना R, समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित एक सम्बन्ध है। तब R का प्रतिलोम सम्बन्ध R^{-1}, समुच्चय B से समुच्चय A में निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है—

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b)\in R\}$$

अर्थात् $(a, b)\in R \Leftrightarrow (b, a)\in R^{-1}$

या $aRb \Leftrightarrow bR^{-1}a$

परिभाषा से स्पष्ट है कि R^{-1} का प्रान्त = R का परिसर तथा R^{-1} का परिसर = R का प्रान्त

☞ **उदाहरण 1.** यदि $A = \{1, 2, 3\}$, और $B = \{0, 4\}$ तथा सम्बन्ध R, समुच्चय A से समुच्चय B में इस प्रकार परिभाषित है कि

$$R = \{(1, 0), (2, 0), (3, 0)\}$$

तब R का प्रतिलोम सम्बन्ध होगा—

$$R^{-1} = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3)\}$$

उपर्युक्त से स्पष्ट है कि

R^{-1} का प्रान्त = $\{0\}$ = R का परिसर

R^{-1} का परिसर = $\{1, 2, 3\}$ = R का प्रान्त

☞ **उदाहरण 2.** यदि N में सम्बन्ध "x, y से छोटा है" द्वारा परिभाषित हो तो $R = \{(x,y)|x,y\in N,x<y\}$ तो इसका प्रतिलोम सम्बन्ध $R^{-1} = \{(x,y)|x,y\in N,x > y\}$ जो "x,y से बड़ा है" द्वारा परिभाषित है।

1.7 सम्बन्धों के प्रकार (TYPES OF RELATIONS)

☆ सम्बन्ध निम्न प्रकार के होते हैं—

(i) स्वतुल्य सम्बन्ध (Reflexive Relation)
(ii) सममित सम्बन्ध (Symmetric Relation)
(iii) संक्रामक सम्बन्ध (Transitive Relation)
(iv) तुच्छ सम्बन्ध (Trivial Relation)

1.8 स्वतुल्य सम्बन्ध (REFLEXIVE RELATION)

☆ यदि सम्बन्ध R किसी समुच्चय A में इस प्रकार परिभाषित हो कि इसके अन्तर्गत A का प्रत्येक अवयव स्वयं से सम्बन्धित हो, तो सम्बन्ध **R स्वतुल्य सम्बन्ध** कहलाता है। अत: R स्वतुल्य सम्बन्ध है यदि और केवल यदि $aRa\ \forall\ a\in A$

अर्थात् R स्वतुल्य सम्बन्ध है $\Leftrightarrow (a, a)\in R,\ \forall\ a\in A$

☆ उपर्युक्त परिभाषा से स्पष्ट है कि A में परिभाषित सम्बन्ध R स्वतुल्य सम्बन्ध नहीं होगा यदि A में कम से कम एक अवयव a ऐसा हो, जो स्वयं से सम्बन्धित न हो अर्थात् $(a, a)\notin R$

☆ किसी समुच्चय A में परिभाषित स्वतुल्य सम्बन्ध R तथा तत्समक सम्बन्ध I_A की परिभाषाओं से स्पष्ट होता है कि I_A, R का उपसमुच्चय (Subset) होता है, अर्थात् $I_A \subseteq R$

अत: किसी समुच्चय A का तत्समक सम्बन्ध I_A, आवश्यक रूप से A में एक स्वतुल्य सम्बन्ध होता है, परन्तु A में

परिभाषित प्रत्येक स्वतुल्य सम्बन्ध का तत्समक होना आवश्यक नहीं है।

☆ **टिप्पणी**—स्वतुल्य सम्बन्ध के लिए $(a, a) \in R$ परन्तु इसका अर्थ यह नहीं है कि अवयव a का सम्बन्ध a के अतिरिक्त दूसरे अवयव से न हो। अर्थात् a का सम्बन्ध स्वयं से होने के साथ A के अन्य अवयवों से भी हो सकता है। जबकि तत्समक सम्बन्ध में a का सम्बन्ध a तथा केवल a से होता है। अत: स्पष्ट है कि प्रत्येक तत्समक सम्बन्ध स्वतुल्य सम्बन्ध है परन्तु स्वतुल्य सम्बन्ध तत्समक सम्बन्ध नहीं होता है।

स्वतुल्य सम्बन्ध की परिभाषा को स्पष्ट करने के लिए निम्न उदाहरण दिये जा रहे हैं—

☞ **उदाहरण 1.** यदि N प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है और N में एक सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित है कि

$xRy \Leftrightarrow x, y$ का भाजक है, $\forall x, y \in N$

तो R एक स्वतुल्य सम्बन्ध होगा, क्योंकि प्रत्येक प्राकृत संख्या स्वयं का भाजक है।

☞ **उदाहरण 2.** किसी समतल में स्थित सरल रेखाओं के समुच्चय A में एक सम्बन्ध R यदि इस प्रकार परिभाषित हो कि $xRy \Leftrightarrow x, y$ के समान्तर है तो R एक स्वतुल्य सम्बन्ध होगा, क्योंकि प्रत्येक रेखा स्वयं के समान्तर होती है।

☞ **उदाहरण 3.** यदि त्रिभुजों के समुच्चय B में एक सम्बन्ध R इस प्रकार से परिभाषित है कि

$xRy \Leftrightarrow x, y$ के सर्वांगसम (congruent) है तो R एक स्वतुल्य सम्बन्ध होगा, क्योंकि प्रत्येक त्रिभुज स्वयं के सर्वांगसम (congruent) होता है।

☞ **उदाहरण 4.** समुच्चयों के समुच्चय S में एक सम्बन्ध R निम्न प्रकार परिभाषित है कि $ARB \Leftrightarrow A, B$ का उपसमुच्चय है तो R एक स्वतुल्य सम्बन्ध होगा क्योंकि प्रत्येक समुच्चय स्वयं का उपसमुच्चय होता है।

☞ **उदाहरण 5.** प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N में यदि एक सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित किया जाये कि $xRy \Leftrightarrow x \geq y$ तो R एक स्वतुल्य सम्बन्ध है क्योंकि $x \in N \Rightarrow x = x$ परन्तु यदि R इस प्रकार परिभाषित हो कि $xRy \Leftrightarrow x > y$ तब यह सम्बन्ध स्वतुल्य नहीं होगा क्योंकि N के किसी भी अवयव के लिए $x > x$ सत्य नहीं है।

☞ **उदाहरण 6.** माना $A = \{a, b, c, d\}$ तथा

$R = \{(a, a), (a, d), (b, a), (b, b), (c, d), (c, c), (d, d)\}$ A में परिभाषित कोई सम्बन्ध है तो R एक स्वतुल्य सम्बन्ध है क्योंकि $(a, a) \in R$, $(b, b) \in R$, $(c, c) \in R$ तथा $(d, d) \in R$ परन्तु यदि A में कोई सम्बन्ध R_1 इस प्रकार से परिभाषित हो कि

$R_1 = \{(a, a), (a, d), (b, c), (b, d), (c, c), (c, d), (d, b)\}$ तब R_1 स्वतुल्य नहीं है क्योंकि $b \in A$ परन्तु $(b, b) \notin R_1$ उसी प्रकार $d \in A$ परन्तु $(d, d) \notin R_1$

1.9 सममित सम्बन्ध (SYMMETRIC RELATION)

☆ यदि सम्बन्ध R किसी समुच्चय A में इस प्रकार से परिभाषित हो कि जब a का b से सम्बन्ध हो तो b का a से वही सम्बन्ध होगा, तो सम्बन्ध R **सममित सम्बन्ध** कहलाता है। अत: R सममित सम्बन्ध होगा, यदि और केवल यदि $aRb \Rightarrow bRa, \forall a, b \in A$

अर्थात् $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R, \forall a, b \in A$

उपर्युक्त से स्पष्ट है कि समुच्चय A में परिभाषित सम्बन्ध R सममित नहीं होगा यदि समुच्चय A में कम से कम दो अवयव a, b ऐसे हों कि

$$a \; R \; b \text{ परन्तु } b \not{R} \; a$$

☆ **नोट**—सममित सम्बन्ध R का प्रतिलोम सम्बन्ध भी स्वयं के बराबर होता है अर्थात् $\boxed{\mathbf{R = R^{-1}}}$

सममित सम्बन्ध की परिभाषा को स्पष्ट करने के लिए निम्न उदाहरण दिये जा रहे हैं—

☞ **उदाहरण 1.** एक समतल में स्थित सरल रेखाओं के समुच्चय A में एक सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित है कि $xRy \Leftrightarrow x, y$ के लम्बवत् है तो R एक सममित सम्बन्ध होगा क्योंकि यदि सरल रेखा x, रेखा y के लम्बवत् है तो रेखा y भी रेखा x के लम्बवत् होगी।

☞ **उदाहरण 2.** त्रिभुजों के समुच्चय A में "सर्वांगसम ($\cong$)" का सम्बन्ध सममित है क्योंकि $\Delta_1 \cong \Delta_2 \Rightarrow \Delta_2 \cong \Delta_1$

☞ **उदाहरण 3.** यदि प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N में एक सम्बन्ध R इस प्रकार से परिभाषित है कि

$xRy \Leftrightarrow x, y$ के बराबर (Equal) है, तो R एक सममित सम्बन्ध होगा, क्योंकि किन्हीं दो प्राकृत संख्याओं x तथा y के लिए, यदि x, y के बराबर है तो y, x के बराबर होता है।

☞ **उदाहरण 4.** यदि किसी समतल में स्थित सरल रेखाओं के समुच्चय A में एक सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित है कि $xRy \Leftrightarrow x, y$ के समान्तर है तो R एक सममित सम्बन्ध है क्योंकि यदि रेखा l_1 रेखा l_2 के समान्तर है तो रेखा l_2 रेखा l_1 के समान्तर होगी।

☞ **उदाहरण 5.** यदि समुच्चय $A = \{1, 2, 3, 4\}$ पर दो सम्बन्ध R_1 तथा R_2 निम्न प्रकार परिभाषित किये जायें कि

$R_1 = \{(1, 3), (1, 4), (3, 1), (2, 2), (4, 1), (4, 4)\}$ तथा

$R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3)\}$ तब

R_1 एक सममित सम्बन्ध है, परन्तु R_2 सममित नहीं है क्योंकि $(1, 3) \in R_2$ परन्तु $(3, 1) \notin R_2$

1.10 संक्रामक सम्बन्ध (TRANSITIVE RELATION)

☆ यदि सम्बन्ध R किसी समुच्चय A में इस प्रकार से परिभाषित हो कि a का b से सम्बन्ध और b का c से सम्बन्ध होने पर a का सम्बन्ध c से हो, तो सम्बन्ध R संक्रामक सम्बन्ध कहलाता है। अत: R संक्रामक सम्बन्ध होगा, यदि और केवल यदि

$$aRb \text{ और } bRc \Rightarrow aRc \; \forall a, b, c \in A$$

अर्थात् $(a, b) \in R$ और $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ उपर्युक्त से

स्पष्ट है कि A में परिभाषित कोई सम्बन्ध R संक्रामक सम्बन्ध नहीं होगा, यदि A में कम से कम तीन अवयव a, b, c ऐसे हों कि कोई

aRb और bRc परन्तु $a \not R c$

संक्रामक सम्बन्ध की परिभाषा को स्पष्ट करने के लिए निम्न उदाहरण दिये जा रहे हैं—

☞ **उदाहरण 1.** किसी समतल में स्थित सरल रेखाओं के समुच्चय A में "*x*, *y* के समान्तर है" एक संक्रामक सम्बन्ध है क्योंकि l_1, l_2, $l_3 \in A$ तथा $l_1 \parallel l_2$ तथा $l_2 \parallel l_3 \Rightarrow l_1 \parallel l_3$

☞ **उदाहरण 2.** समुच्चय A = {1, 2, 3, 4} में R = {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4), (2, 3)} एक संक्रामक सम्बन्ध है क्योंकि

$(1, 2) \in R, (2, 4) \in R \Rightarrow (1, 4) \in R$

$(1, 2) \in R, (2, 3) \in R \Rightarrow (1, 3) \in R$

☞ **उदाहरण 3.** यदि पूर्णांकों के समुच्चय I में एक सम्बन्ध R इस प्रकार से परिभाषित है कि

$xRy \Leftrightarrow x$, y से बड़ा है

तो R एक संक्रामक सम्बन्ध होगा, क्योंकि किन्हीं तीन पूर्णांकों *x*, *y* तथा *z* के लिए यदि *x*, *y* से बड़ा है तथा *y*, *z* से बड़ा है तो *x*, *z* से बड़ा होगा अर्थात् $x>y$ एवं $y>z \Rightarrow x>z$

☞ **उदाहरण 4.** प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N में यदि एक सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित किया जाये कि $xRy \Leftrightarrow x$ तथा *y* दोनों विषम हैं तो R एक संक्रामक सम्बन्ध है क्योंकि $x, y, z \in N$ तथा xRy एवं $yRz \Rightarrow x, y$ तथा *y*, *z* सभी विषम हैं अर्थात् *x*, *z* दोनों विषम हैं अत: xRz

नोट—यदि किसी समुच्चय A पर परिभाषित सम्बन्ध R के अन्तर्गत A में तीन अवयव *a*, *b* व *c* इस प्रकार नहीं मिलें कि संक्रामकता का निरीक्षण किया जा सके, तब भी R को संक्रामक सम्बन्ध ही माना जाता है। जैसे—किसी नगर के निवासियों के समुच्चय में R = {*x*, *y*) : *x*, *y* का पति है} एक संक्रामक सम्बन्ध है।

1.11 तुल्यता सम्बन्ध (EQUIVALENCE RELATION)

☆ किसी समुच्चय A में परिभाषित कोई सम्बन्ध R एक तुल्यता सम्बन्ध कहलाता है यदि

(i) R स्वतुल्य है अर्थात् $(a, a) \in R\ \forall\ a \in A$

(ii) R सममित है अर्थात् $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R, \forall\ a, b, \in A$

(iii) R संक्रामक है अर्थात् $(a, b) \in R$ तथा $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R, \forall\ a, b, c \in A$

तुल्यता सम्बन्ध की परिभाषा को स्पष्ट करने के लिए निम्न उदाहरण दिये जा रहे हैं—

☞ **उदाहरण 1.** यदि किसी समतल में स्थित सरल रेखाओं के समुच्चय A में एक सम्बन्ध R इस प्रकार से परिभाषित है कि $xRy \Leftrightarrow x$, *y* के समान्तर है अर्थात् $x \| y$ तो R एक तुल्यता सम्बन्ध होगा, क्योंकि समतल में स्थित किन्हीं तीन रेखाओं *x*, *y*, *z* के लिए

(i) $\because$ प्रत्येक रेखा स्वयं के समान्तर होती है, अर्थात् $x \parallel x,\ \forall\ x \in A$

$\therefore\ (x, x) \in R,\ \forall\ x \in A$

अत: R स्वतुल्य सम्बन्ध है।

(ii) यदि रेखा *x*, रेखा *y* के समान्तर है तो रेखा *y* भी रेखा *x* के समान्तर होगी। अर्थात्

यदि $x \| y \Rightarrow y \| x,\ \forall\ x, y \in A$

$\therefore (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R,\ \forall\ x, y \in A$

अत: R सममित सम्बन्ध है।

(iii) $\because x \| y$ तथा $y \| z \Rightarrow x \| z$

$\therefore$ यदि $(x, y) \in R$ एवं $(y, z) \in R, \Rightarrow (x, z) \in R,\ \forall\ x, y, z \in A$

अत: R संक्रामक सम्बन्ध है।

☞ **उदाहरण 2.** एक समतल में स्थित त्रिभुजों के समुच्चय T में एक सम्बन्ध R निम्न प्रकार परिभाषित है कि

$xRy \Leftrightarrow x$, *y* के सर्वांगसम है। तब R एक तुल्यता सम्बन्ध है, क्योंकि

(i) प्रत्येक त्रिभुज स्वयं के सर्वांगसम होता है अत:

$\Delta \in T \Rightarrow \Delta \cong \Delta \Rightarrow \Delta R \Delta$ अर्थात् $(\Delta, \Delta) \in R, \forall \Delta \in T$

अत: R स्वतुल्य है।

(ii) यदि $\Delta_1, \Delta_2 \in T$ तथा $(\Delta_1, \Delta_2) \in R$

तब $(\Delta_1, \Delta_2) \in R \Rightarrow \Delta_1 \cong \Delta_2 \Rightarrow \Delta_2 \cong \Delta_1 \Rightarrow (\Delta_2, \Delta_1) \in R$

अत: R सममित है।

(iii) यदि $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \in T$ तथा $(\Delta_1, \Delta_2) \in R$ तथा $(\Delta_2, \Delta_3) \in R$ तब $(\Delta_1, \Delta_2) \in R$ तथा $(\Delta_2, \Delta_3) \in R \Rightarrow \Delta_1 \cong \Delta_2$ तथा $\Delta_2 \cong \Delta_3 \Rightarrow \Delta_1 \cong \Delta_3 \Rightarrow (\Delta_1, \Delta_3) \in R$

$\therefore$ R संक्रामक है।

अत: R एक तुल्यता सम्बन्ध है।

1.12 तत्समक सम्बन्ध (IDENTITY RELATION)

☆ किसी समुच्चय A का तत्समक सम्बन्ध वह सम्बन्ध है जिसके अन्तर्गत A का प्रत्येक अवयव स्वयं से और केवल स्वयं से सम्बन्धित है। इसे प्राय: I_A द्वारा व्यक्त किया जा सकता है अत:

$$I_A = \{(a, a) \mid \forall\ a \in A\}$$

यहाँ ∀ का चिन्ह 'प्रत्येक' के लिए प्रयोग किया जाता है।

☞ **उदाहरण** यदि A = {1, 2, 3, 4, 5} हो तो

$I_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$

तत्समक सम्बन्ध की परिभाषा से यह स्वयं सिद्ध होता है कि तत्समक सम्बन्ध का प्रतिलोम सम्बन्ध भी स्वयं तत्समक सम्बन्ध होता है।

अर्थात्

$$I_A^{-1} = \{(a, a) \mid \forall\ a \in A\} = I_A$$

I_A का प्रान्त = I_A^{-1} का प्रान्त

I_A का परिसर = I_A^{-1} का परिसर