NCERT के पूर्णतया संशोधित नवीनतम् पाठ्यक्रम पर आधारित

संजीव®

गणित

कक्षा-12 (भाग-2)

माध्यमिक शिक्षा बोर्ड, राजस्थान के विद्यार्थियों के लिए

शिक्षा विभाग, राजस्थान द्वारा जारी प्रश्न बैंक के समस्त प्रश्न हल सहित यथास्थान दिये गये हैं।

लेखक :

एस. सी. गुप्ता
एम.एससी., एम.एड.
वरिष्ठ व्याख्याता गणित
राजकीय आदर्श उच्च माध्यमिक विद्यालय
सुजानपुरा, बस्सी (जयपुर)

डॉ. आर. वाधवानी
एम.एससी., एम.फिल., पीएच.डी.

2027

मूल्य : ₹ 440/-

संजीव प्रकाशन
जयपुर-3

- प्रकाशक :

  संजीव प्रकाशन

  धामाणी मार्केट, चौड़ा रास्ता,

  जयपुर-3

  email : sanjeevprakashanjaipur@gmail.com
  website : www.sanjivprakashan.com

- © प्रकाशकाधीन

- **मूल्य : ₹ 440.00**

- लेजर कम्पोजिंग :

  संजीव प्रकाशन (D.T.P. Department), जयपुर

- मुद्रक :

  पंजाबी प्रेस, जयपुर

  ★★★★★★

- ❖ इस पुस्तक में त्रुटियों को दूर करने के लिए हर संभव प्रयास किया गया है। किसी भी त्रुटि के पाये जाने पर अथवा किसी भी तरह के सुझाव के लिए आप हमें निम्न पते पर email या पत्र भेजकर सूचित कर सकते हैं—

  email : sanjeevprakashanjaipur@gmail.com
  पता : प्रकाशन विभाग संजीव प्रकाशन
  धामाणी मार्केट, चौड़ा रास्ता, जयपुर

  आपके द्वारा भेजे गये सुझावों से अगला संस्करण और बेहतर हो सकेगा।
- ❖ यद्यपि इस पुस्तक को प्रकाशित करने में सभी सावधानियों का पालन किया गया है तथापि इस पुस्तक में प्रकाशित किसी त्रुटि के प्रति तथा इससे होने वाली किसी भी क्षति के लिए लेखक, प्रकाशक, संपादक तथा मुद्रक किसी भी रूप में जिम्मेदार नहीं हैं।
- ❖ सभी प्रकार के विवादों का न्यायिक क्षेत्र 'जयपुर' होगा।

प्रस्तावना

ज्ञान एवं विज्ञान में तीव्र गति से हो रही वृद्धि को ध्यान में रखते हुए प्रस्तुत पुस्तक '**गणित भाग-2**' का यह संस्करण राजस्थान बोर्ड द्वारा स्वीकृत **कक्षा-12 के नवीनतम संशोधित N.C.E.R.T. पाठ्यक्रमानुसार** लिखा गया है। प्रस्तुत सन्दर्भ पुस्तक इस कक्षा में आने वाले विज्ञान, वाणिज्य एवं कला वर्ग के विद्यार्थियों के स्तर को ध्यान में रखकर लिखी गयी है।

प्रस्तुत संस्करण की निम्न विशेषताएँ हैं—

1. विषय-वस्तु की भाषा-शैली को सरल-सहज व पूर्ण रूप से राजस्थान राज्य के अनुरूप रखा गया है जिससे कि विद्यार्थी ज्ञान को आसानी से समाहित कर सकें।
2. विभिन्न गणितीय सूत्रों का समावेश।
3. महत्त्वपूर्ण तथ्यों का समावेश।
4. पुस्तक में आवश्यकतानुसार हल सहित उदाहरण, प्रत्येक विषय-वस्तु के साथ दिये गये हैं, जिससे विद्यार्थी गणित विषय के सिद्धान्तों के अनुप्रयोगों को आसानी से समझ सकें।
5. NCERT के सभी प्रश्नों का हल पुस्तक के प्रत्येक अध्याय में समायोजित है।
6. प्रत्येक अध्याय के अन्त में **महत्त्वपूर्ण प्रश्न (वस्तुनिष्ठ, रिक्त स्थान, अतिलघूत्तरात्मक, लघूत्तरात्मक एवं निबन्धात्मक) हल सहित दिये गये हैं,** जिससे विद्यार्थी में आत्मविश्वास उत्पन्न हो।
7. प्रत्येक अध्याय के अन्त में **विभिन्न प्रतियोगी परीक्षाओं में पूछे गये बहुविकल्पीय प्रश्नों को भी हल सहित** दिया गया है।
8. इस पुस्तक में **शिक्षा विभाग, राजस्थान** द्वारा जारी **प्रश्न बैंक** के समस्त प्रश्नों को हल सहित यथास्थान दिया गया है, जिससे विद्यार्थियों को बोर्ड परीक्षा में मदद मिलेगी।

हमारे द्वारा भरसक प्रयास किया गया है कि यह पुस्तक विद्यार्थियों, अध्यापकों की आवश्यकताओं की पूर्ति करेगी तथा उनके लिए लाभदायक सिद्ध होगी।

आशा है कि यह पुस्तक C.B.S.E. के हिन्दी माध्यम के विद्यार्थियों के लिये भी मददगार सिद्ध होगी।

पुस्तक का नवीनतम संशोधित संस्करण नये कलेवर में प्रस्तुत किया जा रहा है। इसमें विषय विशेषज्ञों, शिक्षकों तथा पाठकों से प्राप्त बहुमूल्य सुझावों को भी उचित स्थान दिया गया है।

हम उन सभी विद्वानों, लेखकों के आभारी हैं जिनसे हमें निरन्तर प्रेरणा एवं मार्गदर्शन प्राप्त होते रहे हैं।

इस पुस्तक के प्रकाशन हेतु हम संजीव प्रकाशन के भी अत्यन्त आभारी हैं जिनके अथक तथा सतत प्रयासों से इस पुस्तक का प्रकाशन हो पाया है।

लेखक अपने परिश्रमपूर्ण प्रयास को तभी सफल मानेंगे जब यह पुस्तक सम्बन्धित छात्रों के लिए अधिक से अधिक लाभदायक सिद्ध होगी। प्रस्तुत पुस्तक को और अधिक उपयोगी बनाने हेतु शिक्षकों एवं पाठकगण के बहुमूल्य सुझावों का सहर्ष स्वागत किया जायेगा। अत: हम उनके आभारी रहेंगे।

लेखक

एस.सी. गुप्ता

डॉ. आर. वाधवानी

विषय-सूची

7. समाकलन
(Integrals) 1-135

8. समाकलनों के अनुप्रयोग
(Application of Integrals) 136-157

9. अवकल समीकरण
(Differential Equations) 158-230

10. सदिश बीजगणित
(Vector Algebra) 231-285

11. त्रि-विमीय ज्यामिति
(Three Dimensional Geometry) 286-320

12. रैखिक प्रोग्रामन
(Linear Programming) 321-341

13. प्रायिकता
(Probability) 342-384

उच्च माध्यमिक परीक्षा, 2026

गणित

(Mathematics)

समय : 3 घण्टे 15 मिनट **पूर्णांक : 80**

परीक्षार्थियों के लिए सामान्य निर्देश :

(1) परीक्षार्थी सर्वप्रथम अपने प्रश्न-पत्र पर नामांक अनिवार्यत: लिखें।
(2) सभी प्रश्न करने अनिवार्य हैं।
(3) प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दी गई उत्तर-पुस्तिका में ही लिखें।
(4) जिन प्रश्नों में आन्तरिक खण्ड हैं, उन सभी के उत्तर एक साथ ही लिखें।
(5) प्रश्न-पत्र के हिन्दी व अंग्रेजी रूपान्तर में किसी प्रकार की त्रुटि/अन्तर/विरोधाभास होने पर हिन्दी भाषा के प्रश्न को ही सही मानें।
(6) प्रश्न का उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें।
(7) प्रश्न संख्या 14 से 20 में आन्तरिक विकल्प दिये गए हैं।
(8) प्रश्न संख्या 20 ग्राफ पेपर पर हल करना है।

खण्ड-अ (Section-A)

1. बहुविकल्पीय प्रश्न।

(i) यदि $f : R \to R$, $f(x) = (3 - x^3)^{1/3}$ द्वारा प्रदत्त है, तो $fof(x)$ बराबर है- [1]

(अ) $x^{1/3}$ (ब) x^3
(स) x (द) $(3 - x^3)$

(ii) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ का मुख्य मान है- [1]

(अ) $\frac{\pi}{4}$ (ब) $\frac{\pi}{6}$ (स) $\frac{\pi}{3}$ (द) $\frac{\pi}{2}$

(iii) $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ एक वर्ग आव्यूह है यदि- [1]

(अ) $m < n$ (ब) $m > n$
(स) $m = n$ (द) इनमें से कोई नहीं

(iv) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ हो, तो (2A – B) होगा- [1]

(अ) $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ (ब) $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

(स) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ (द) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{vmatrix} x^2 - x + 1 & x - 1 \\ x + 1 & x + 1 \end{vmatrix}$ का मान होगा- [1]

(अ) $x^2 - x + 2$ (ब) $x^3 + x^2 - 2$
(स) $x^3 - x^2 + 2$ (द) $x^3 + x^2 + 4$

(vi) यदि $2x + 3y = \sin y$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ बराबर होगा- [1]

(अ) $\frac{3}{\sin y - 2}$ (ब) $\frac{2}{\cos y - 3}$
(स) $\frac{\cos y + 3}{2}$ (द) $\frac{2}{\cos y}$

(vii) यदि $y = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0 < x < 1$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ बराबर होगा- [1]

(अ) $\frac{1}{1+x^2}$ (ब) $\frac{2}{4+x}$
(स) $\frac{2}{1+x^2}$ (द) $\frac{2}{x+x^2}$

(viii) एक वृत्त की त्रिज्या $r = 5$ सेमी पर r के सापेक्ष क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर है- [1]

(अ) 12π (ब) 8π
(स) 5π (द) 10π

(ix) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ बराबर है- [1]

(अ) $\tan x + \sin x + c$ (ब) $\tan x - \cot x + c$
(स) $\tan x \cot x + c$ (द) $2\tan x - \cot 2x + c$

(x) वक्र $y^2 = 4x$, y – अक्ष एवं रेखा $y = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है- [1]

(अ) 2 (ब) $\frac{4}{9}$ (स) $\frac{9}{4}$ (द) $\frac{9}{2}$

(xi) अवकल समीकरण $2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + y = 0$ की कोटि है- [1]

(अ) 2 (ब) 1
(स) 0 (द) परिभाषित नहीं है

(xii) निम्न में से कौन-सी एक सदिश राशि है? [1]

(अ) समय (ब) आयतन
(स) बल (द) गति

(xiii) सदिश $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=-2\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}$ और $\vec{c}=\hat{i}-6\hat{j}-7\hat{k}$ का योगफल है– [1]

(अ) $-4\hat{j}-\hat{k}$ (ब) $4\hat{i}-\hat{k}$

(स) $4\hat{j}+5\hat{k}$ (द) $\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}$

(xiv) सदिश $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ के अनुदिश इकाई सदिश है– [1]

(अ) $\frac{\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}}{\sqrt{5}}$ (ब) $\frac{\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{6}}$

(स) $\frac{2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{6}}$ (द) $\frac{\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}}{\sqrt{6}}$

(xv) यदि सरल रेखाएँ $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{\lambda}=\frac{z-1}{-1}$ तथा $\frac{x-1}{-\lambda}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{1}$ परस्पर लम्बवत् हैं, तो 'λ' का मान है– [1]

(अ) 0 (ब) 1 (स) 2 (द) 3

(xvi) 52 पत्तों की एक गड्डी में से यादृच्छया बिना प्रतिस्थापित किए गए दो पत्ते निकाले गए, तो दोनों पत्तों के काले रंग का होने की प्रायिकता है– [1]

(अ) $\frac{1}{2}$ (ब) $\frac{1}{12}$ (स) $\frac{25}{102}$ (द) $\frac{1}{4}$

(xvii) यदि A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं तथा P(A) = 0.3 और P(B) = 0.4 हो, तो P(A∪B) का मान होगा– [1]

(अ) 0.58 (ब) 0.70

(स) 0.12 (द) 0.10

(xviii) यदि पांसों का एक जोड़ा उछाला जाता है, तो प्रत्येक पांसे पर सम अभाज्य संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता होगी– [1]

(अ) $\frac{1}{3}$ (ब) $\frac{1}{12}$ (स) $\frac{1}{36}$ (द) 0

2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(i) $\sin^{-1}x$ एक ऐसा फलन है, जिसका प्रांत ..... है। [1]

(ii) सारणिक $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ -1 & 3 & 0\\ 4 & 1 & 0\end{vmatrix}$ का मान ..... है। [1]

(iii) एक परिवर्तनशील घन का किनारा 3 सेमी/से. की दर से बढ़ रहा है। घन का आयतन ..... दर से बढ़ रहा है, जबकि किनारा 10 सेमी लम्बा है। [1]

(iv) $\int(2x-3\cos x+e^x)\,dx=$ ..... [1]

(v) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{1+x^2}$ का व्यापक हल ..... है। [1]

(vi) बिन्दुओं P(2, 3, 0) एवं Q(–1, –2, –4) को मिलाने वाला एवं P से Q की तरफ निर्देशित सदिश ..... है। [1]

3. अति लघूत्तरात्मक प्रश्न।

(i) यदि $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ -4 & 2 & 5\end{bmatrix}$ और $B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ है, तो AB ज्ञात कीजिए। [1]

(ii) सारणिक $\Delta=\begin{vmatrix}0 & \sin\alpha & -\cos\alpha\\ -\sin\alpha & 0 & \sin\beta\\ \cos\alpha & -\sin\beta & 0\end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए। [1]

(iii) यदि $y=\frac{e^x}{\sin x}$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। [1]

(iv) यदि $y=e^x+e^{x^2}+.....+e^{x^5}$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। [1]

(v) हवा के एक बुलबुले की त्रिज्या ½ सेमी/से. की दर से बढ़ रही है। बुलबुले का आयतन किस दर से बढ़ रहा है जबकि त्रिज्या 1 सेमी है? [1]

(vi) किसी उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय रुपयों में $R(x) = 13x^2 + 26x + 15$ से प्रदत्त है। सीमांत आय ज्ञात कीजिए जब $x = 7$ हैं। [1]

(vii) हल कीजिए $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$। [1]

(viii) वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [1]

(ix) सत्यापित कीजिए कि फलन $y = a\cos x + b\sin x$, जिसमें $a, b \in R$ अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ का हल है। [1]

(x) दो सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के परिमाण क्रमशः $\sqrt{3}$ एवं 2 हैं और $\vec{a}.\vec{b}=\sqrt{6}$ है, तो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। [1]

(xi) दो बिन्दुओं (–2, 4, –5) और (1, 2, 3) से होकर गुजरने वाली रेखा की दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए। [1]

(xii) एक परिवार में दो बच्चे हैं। यदि यह ज्ञात हो कि बच्चों में कम से कम एक बच्चा लड़का है, तो दोनों बच्चों के लड़का होने की क्या प्रायिकता है? [1]

खण्ड-ब (Section-B)

लघूत्तरात्मक प्रश्न।

4. सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में $R = \{(a,b): a \le b\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R स्वतुल्य तथा संक्रामक है किन्तु सममित नहीं है। [2]

5. दर्शाइए कि $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)=2\sin^{-1}x, -\frac{1}{\sqrt{2}}\le x\le\frac{1}{\sqrt{2}}$ । [2]

6. यदि $x\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}$ है, तो x तथा y के मान ज्ञात कीजिए। [2]

7. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (1, 0), (6, 0) और (4, 3) हैं। [2]

8. यदि $x = \cos\theta - \cos 2\theta$, $y = \sin\theta - \sin 2\theta$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। [2]

9. यदि $y = \sin^{-1}x$ है, तो दर्शाइए $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=0$ है। [2]

10. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$ द्वारा प्रदत्त फलन f के स्थानीय उच्चतम और स्थानीय निम्नतम मान ज्ञात कीजिए। [2]

11. ज्ञात कीजिए $\int\frac{x^2}{1-x^6}dx$ । [2]

12. प्रथम चतुर्थांश में वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ एवं रेखाओं $x = 0$, $x = 2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [2]

13. उस समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी संलग्न भुजाएँ सदिश $\vec{a}=3\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}$ और $\vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ द्वारा दी गई हैं। [2]

खण्ड-स (Section-C)

दीर्घ उत्तरात्मक प्रश्न।

14. ज्ञात कीजिए $\int\frac{x^2}{\sqrt{x^6+a^6}}dx$ । [3]

अथवा

आंशिक भिन्नों का प्रयोग करते हुए ज्ञात कीजिए $\int\frac{1}{x^2-9}dx$ । [3]

15. अवकल समीकरण $\frac{dx}{dy}-\frac{x}{y}=2y$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। [3]

अथवा

अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+y\cot x=2x+x^2\cot x(x\neq 0)$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए। दिया हुआ है कि $y = 0$ यदि $x=\frac{\pi}{2}$ । [3]

16. दर्शाइए कि दिक्-कोसाइन $\frac{12}{13},\frac{-3}{13},\frac{-4}{13};\frac{4}{13},\frac{12}{13},\frac{3}{13};\frac{-4}{13},\frac{12}{13}$ वाली तीनों रेखाएँ परस्पर लम्बवत है। [3]

अथवा

स्थिति सदिश $2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ वाले बिन्दु से गुजरने वाली तथा $\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ की दिशा में जाने वाली रेखा का सदिश और कार्तीय रूपों में समीकरण ज्ञात कीजिए। [3]

17. यह दिया गया है कि दो पांसों को फेंकने पर प्राप्त दो संख्याएँ भिन्न-भिन्न हैं। दोनों संख्याओं का योग 4 होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। [3]

अथवा

एक पांसे को एक बार उछाला जाता है। घटना 'पांसे पर प्राप्त संख्या 3 का अपवर्त्य है' को E से और 'पांसे पर प्राप्त संख्या सम है' को F से निरूपित किया जाए तो बताएँ क्या घटनाएँ E और F स्वतंत्र हैं। [3]

खण्ड-द (Section-D)

निबंधात्मक प्रश्न।

18. $\int_2^3\frac{dx}{x^2-1}$ का मान ज्ञात कीजिए। [4]

अथवा

$\int\sqrt{3-2x-x^2}\,dx$ ज्ञात कीजिए। [4]

19. रेखा युग्म $\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$ और $\frac{x-5}{4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{8}$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए। [4]

अथवा

P का मान ज्ञात कीजिए ताकि रेखाएँ $\frac{1-x}{3}=\frac{7y-14}{2P}=\frac{z-3}{2}$ और $\frac{7-7x}{3P}=\frac{y-5}{1}=\frac{6-z}{5}$ परस्पर लम्ब हों। [4]

20. आलेखीय विधि द्वारा उद्देश्य फलन $z = 4x + y$ का अधिकतम मान निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत ज्ञात कीजिए। [4]

$x + y \le 50$
$3x + y \le 90$
तथा $x \ge 0, y \ge 0$

अथवा

आलेखीय विधि द्वारा उद्देश्य फलन $z = 200x + 500y$ का न्यूनतम मान निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत ज्ञात कीजिए। [4]

$x + 2y \ge 10$
$3x + 4y \le 24$
तथा $x \ge 0, y \ge 0$

❑❑❑

गणित भाग-2 (कक्षा-12)

समाकलन
(INTEGRALS)

7 अध्याय

7.1 **परिचय** (Introduction)
7.2 **समाकलन-अचर** (The Constant of Integration)
7.3 **समाकलन के प्रमेय** (Theorems on Integration)
7.4 **समाकलन के मानक सूत्र** (Standard Formulae of Integration)
7.5 **समाकलन की विधियाँ** (Methods of Integration)
7.6 **कुछ विशिष्ट फलनों के समाकलन** (Integrals of Some Particular Functions)
7.7 **आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन** (Integration by Partial Fractions)
7.8 **खंडशः समाकलन** (Integration by Parts)
7.9 **निश्चित समाकलन** (Definite Integrals)
7.10 **कलन की आधारभूत प्रमेय** (Fundamental Theorem of Calculus)
7.11 **प्रतिस्थापन द्वारा निश्चित समाकलनों का मान ज्ञात करना** (Evaluation of Definite Integrals by Substitution)
7.12 **निश्चित समाकलनों के कुछ गुणधर्म** (Some Properties of Definite Integrals)

7.1 परिचय (INTRODUCTION)

☆ यदि हम समाकलन गणित (Integral Calculus) के इतिहास का अध्ययन करें तो हमें ज्ञात होगा कि इसकी खोज समतल में रेखाओं तथा वक्रों (Curves) द्वारा परिबद्ध (bounded) समतल क्षेत्रों के क्षेत्रफलों को ज्ञात करने के लिए की गई थी। इसकी धारणा ऐसी श्रेणी के योगफल की सीमा पर आधारित थी जिसमें पदों की संख्या अनन्त थी और प्रत्येक पद शून्य की ओर अग्रसर था। इसका अध्ययन इस दृष्टि से हम अध्याय-8 में करेंगे। बाद में यह देखा गया कि **समाकलन की प्रक्रिया** (Process of Integration), **अवकलन** (Differentiation) **की प्रतिलोम** (Inverse) **प्रक्रिया** है।

☆ अवकलन गणित में हमें दिये गये फलन का अवकलन गुणांक या अवकलन ज्ञात करना होता है, जबकि समाकलन गणित में हमें वह फलन ज्ञात करना होता है जिसका अवकल गुणांक दिया होता है। अतः वह प्रक्रिया (Process) जिसके द्वारा किसी दिये हुए फलन $f(x)$ से वह फलन माना $F(x)$, ज्ञात करना जिसका अवकल गुणांक $\frac{d}{dx}\{F(x)\}$ = फलन $f(x)$ हो, **समाकलन** (Integration) कहलाती है। स्पष्टतः समाकलन की यह प्रक्रिया **अवकलन की प्रतिलोम प्रक्रिया है तथा इसे प्रति-अवकलन** (Anti-derivatives) **भी कहते हैं,** अर्थात् यदि

$$\frac{d}{dx}\{F(x)\} = f(x)$$

तो $F(x)$, दिये हुए फलन $f(x)$ का x सापेक्ष समाकलन कहलाता है। इसे संकेतन रूप (Symbolically) में निम्न प्रकार से व्यक्त किया जाता है-$\int f(x)dx = F(x)$ जहाँ पर संकेत $\int$ (जो कि अंग्रेजी अक्षर S, जिसका प्रयोग योग के लिए किया जाता है, का एक बढ़ा हुआ रूप है) का प्रयोग समाकलन के लिए किया जाता है तथा dx में अक्षर x, उस चर (Variable) को व्यक्त करता है जिसके सापेक्ष हमें समाकलन करना है फलन $f(x)$ जिसका हमें समाकलन करना होता है, उसे समाकल्य (Integrand) कहते हैं तथा $F(x)$ को **समाकल** (Integral) कहते हैं। अतः

$$\int f(x)dx = F(x)$$

समाकल्य (Integrand) — समाकल (Integral)

समाकलन (Integration)

☞ **उदाहरणार्थ—**

(i) चूँकि $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ $\therefore \int \cos x dx = \sin x$

(ii) चूँकि $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ $\therefore \int \sec^2 x dx = \tan x$

(iii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^5}{5}\right) = x^4$ $\therefore \int x^4 dx = \frac{x^5}{5}$

(iv) $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{3x}}{3}\right) = e^{3x} \quad \therefore \int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3}$

7.2 समाकलन-अचर (THE CONSTANT OF INTEGRATION)

☆ हम जानते हैं कि किसी भी अचर फलन का अवकल गुणांक शून्य होता है। अर्थात्

$$\frac{d}{dx}(c) = 0, \text{ जहाँ } c \text{ एक अचर फलन है।}$$

अब यदि $\frac{d}{dx}\{F(x)\} = f(x)$

तब $\frac{d}{dx}\{F(x) + c\} = \frac{d}{dx}\{F(x)\} + \frac{d}{dx}(c)$
$= f(x) + 0$
$= f(x)$

अत: समाकलन की परिभाषा से
$\int f(x)\,dx = F(x) + c$

☆ यहाँ पर c, **समाकलन-अचर** (The Constant of Integration) कहलाता है तथा चर x से स्वतंत्र (Independent) होता है। c के अलग-अलग मान रखने पर दिये हुये फलन $f(x)$ के **भिन्न-भिन्न** समाकल प्राप्त होते हैं जिनमें केवल अचर पद का ही अन्तर होता है। अत: $F(x) + c$, फलन $f(x)$ का व्यापक समाकल कहलाता है।

☆ व्यापक समाकल में c निश्चित नहीं होता। c की अनिश्चितता के कारण यह अनिश्चित समाकल (Indefinite Integral) भी कहलाता है।

☞ **उदाहरणार्थ-**

(i) चूँकि $\frac{d}{dx}(\tan x + c) = \sec^2 x$
$\therefore \int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$

(ii) चूँकि $\frac{d}{dx}(e^x + c) = e^x$
$\therefore \int e^x dx = e^x + c$

(iii) चूँकि $\frac{d}{dx}(\sin x + c) = \cos x$
$\therefore \int \cos x\,dx = \sin x + c$

☆ **टिप्पणी :** छात्रों को अनिश्चित समाकलन की प्रत्येक समस्या में समाकलन की प्रक्रिया के अन्त में समाकलन-अचर लिखने का अभ्यास होना चाहिए। यह समाकलन की प्रक्रिया के बाद अन्त में जोड़ा जाता है। सुविधा के लिए हम इसे बार-बार नहीं लिखते।

7.3 समाकलन के प्रमेय (THEOREMS ON INTEGRATION)

☆ **प्रमेय-1 :** यदि समाकलन-अचर हटा दिया जाये, तो

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x)$$

उपपत्ति : माना कि

$$\frac{d}{dx}\{F(x)\} = f(x) \quad \ldots(1)$$

तो समाकलन की परिभाषानुसार

$$\int f(x)dx = \{F(x) + c\} \quad \ldots(2)$$

जहाँ c एक अचर है।

समीकरण (2) के दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = \frac{d}{dx}\{F(x)+c\}$$
$$= \frac{d}{dx}\{F(x)\} + \frac{d}{dx}(c)$$
$$= f(x) + 0 \text{ [समी. (1) से]}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x)$$

इस प्रमेय से यह सिद्ध होता है कि समाकलन की प्रक्रिया, अवकलन की प्रतिलोम (Inverse) प्रक्रिया है।

☆ **प्रमेय-2 :** एक अचर तथा फलन के गुणनफल का समाकल उस अचर तथा फलन के समाकल के गुणनफल के बराबर होता है, अर्थात्

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

जहाँ k अचर है।

उपपत्ति-अवकलन गणित के प्रमेय से हम जानते हैं कि—

$$\frac{d}{dx}\left[k\int f(x)dx\right] = k\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]$$
$$= kf(x) \text{ [प्रमेय 1 से]}$$

अत: समाकलन की परिभाषानुसार

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

☆ **प्रमेय-3 :**

$$\int\{f_1(x) \pm f_2(x)\}dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

अर्थात् दो फलनों के योग व अन्तर का समाकल उनके समाकलों के योग व अन्तर के बराबर होता है।

उपपत्ति-

माना $\int f_1(x)dx = \phi_1(x) \quad \ldots(1)$

तथा $\int f_2(x)dx = \phi_2(x) \quad \ldots(2)$

अत: $\frac{d}{dx}\phi_1(x) = f_1(x)$ तथा $\frac{d}{dx}\phi_2(x) = f_2(x)$

$$\therefore \frac{d}{dx}\{\phi_1(x) \pm \phi_2(x)\} = \frac{d}{dx}\phi_1(x) \pm \frac{d}{dx}\phi_2(x)$$
$$= f_1(x) \pm f_2(x)$$

समाकलन करने पर

$$\phi_1(x) \pm \phi_2(x) = \int \{f_1(x) \pm f_2(x)\}dx$$

या $\int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx = \int \{f_1(x) \pm f_2(x)\}dx$

[समीकरण (1) व (2) से]

इस प्रमेय को परिमित संख्या के पदों के समाकल के लिए भी

प्रयोग कर सकते हैं।

$\therefore \int \{f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x)\} \pm \ldots\ldots\ldots \pm f_n(x)\}dx$

$= \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \int f_3(x)dx \pm \ldots\ldots \pm \int f_n(x)dx$

इस प्रकार समाकलन संक्रिया परिमित संख्या के पदों पर बंटित होती है।

☆ **टिप्पणी**-(i) इस प्रमेय को पद प्रति पद समाकलन का नियम कहते हैं।
(ii) इस नियम का अनन्त पदों के योग के समाकल पर लागू होना आवश्यक नहीं है।

☆ **व्यापीकरण**

$\int a\, f_1(x)dx \pm \int b\, f_2(x)dx = a \int f_1(x)dx \pm b \int f_2(x)dx$

7.4 समाकलन के मानक सूत्र (STANDARD FORMULAE OF INTEGRATION)

☆ अवकलन गणित के मानक सूत्रों में केवल मात्र परिभाषा का प्रयोग करने से ही समाकलन के लिये अनेक संगत सूत्र प्राप्त किये जा सकते हैं। ऐसा निम्न सारणी में दर्शाया गया है :

	अवकलज सूत्र	संगत समाकल सूत्र
1.	$\frac{d}{dx}(c) = 0$, c अचर है	$\int 0\, dx = c$, अचर
2.	$\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = n\, x^{n-1}, n \neq 0$ या $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n,\ n \neq -1$	$\int nx^{n-1}dx = x^n + c, n \neq 0$ या $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$
3.	$\frac{d}{dx}\left(\log\lvert x\rvert\right) = \frac{1}{x}, x \neq 0$	$\int \frac{1}{x}dx = \log\lvert x\rvert + c,\ x \neq 0$
4.	$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\int e^x dx = e^x + c$
5.	$\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log_e a}\right) = a^x, a > 0, a \neq 1$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a} + c = a^x \log_a e + c, a > 0, a \neq 1$
6.	$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ जहाँ x रेडियन में है।	$\int \cos x\, dx = \sin x + c$ जहाँ x रेडियन में है।
7.	$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$	$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$
8.	$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$
9.	$\frac{d}{dx}(-\cot x) = \operatorname{cosec}^2 x = \csc^2 x$	$\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = \int \csc^2 x\, dx = -\cot x + c$
10.	$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$
11.	$\frac{d}{dx}(-\operatorname{cosec} x) = \operatorname{cosec} x \cot x$	$\int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx = -\operatorname{cosec} x + c$
12.	$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\lvert x\rvert < 1)$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1} x + c = \arcsin x + c, (\lvert x\rvert < 1)$