

NCERT के पूर्णतया संशोधित नवीनतम् पाठ्यक्रम पर आधारित

संजीव[®]

गणित

कक्षा-12 (भाग-1)

माध्यमिक शिक्षा बोर्ड, राजस्थान के विद्यार्थियों के लिए

शिक्षा विभाग, राजस्थान द्वारा जारी प्रश्न बैंक के समस्त प्रश्न
हल सहित यथास्थान दिये गये हैं।

लेखक :

एस. सी. गुप्ता

एम.एससी., एम.एड.

वरिष्ठ व्याख्याता गणित

राजकीय आदर्श उच्च माध्यमिक विद्यालय

सुजानपुरा, बस्सी (जयपुर)

डॉ. आर. वाधवानी

एम.एससी., एम.फिल., पीएच.डी.

2027

संजीव प्रकाशन

जयपुर-3

मूल्य :

₹ 440/-

- प्रकाशक :

संजीव प्रकाशन

धामाणी मार्केट, चौड़ा रास्ता,

जयपुर-3

email : sanjeevprakashanjaipur@gmail.com

website : www.sanjivprakashan.com

- © प्रकाशकाधीन

- मूल्य : ₹ 440.00

- लेजर कम्पोजिंग :

संजीव प्रकाशन (D.T.P. Department), जयपुर

- मुद्रक :

पंजाबी प्रेस, जयपुर

★★★★★★

- ❖ इस पुस्तक में त्रुटियों को दूर करने के लिए हर संभव प्रयास किया गया है। किसी भी त्रुटि के पाये जाने पर अथवा किसी भी तरह के सुझाव के लिए आप हमें निम्न पते पर email या पत्र भेजकर सूचित कर सकते हैं—
email : sanjeevprakashanjaipur@gmail.com
पता : प्रकाशन विभाग संजीव प्रकाशन
धामाणी मार्केट, चौड़ा रास्ता, जयपुर
आपके द्वारा भेजे गये सुझावों से अगला संस्करण और बेहतर हो सकेगा।
- ❖ इस पुस्तक में प्रकाशित किसी त्रुटि के प्रति तथा इससे होने वाली किसी भी क्षति के लिए लेखक, प्रकाशक, संपादक तथा मुद्रक किसी भी रूप में जिम्मेदार नहीं हैं।
- ❖ सभी प्रकार के विवादों का न्यायिक क्षेत्र 'जयपुर' होगा।

प्रस्तावना

ज्ञान एवं विज्ञान में तीव्र गति से हो रही वृद्धि को ध्यान में रखते हुए प्रस्तुत पुस्तक 'गणित भाग-1' का यह संस्करण राजस्थान बोर्ड द्वारा स्वीकृत कक्षा-12 के नवीनतम संशोधित N.C.E.R.T. पाठ्यक्रमानुसार लिखा गया है। प्रस्तुत सन्दर्भ पुस्तक इस कक्षा में आने वाले विज्ञान, वाणिज्य एवं कला वर्ग के विद्यार्थियों के स्तर को ध्यान में रखकर लिखी गयी है। पुस्तक में विगत वर्षों में विभिन्न प्रतियोगी परीक्षाओं में पूछे गये प्रश्न हल सहित दिये गये हैं।

पुस्तक का निर्माण करते समय इस बात का विशेष ध्यान रखा गया है कि पुस्तक की विषय-सामग्री एवं सिद्धान्तों को सरल भाषा में प्रस्तुत कर छात्रों की विषय के प्रति रुचि पैदा हो। N.C.E.R.T. के सभी प्रश्नों का हल पुस्तक में समायोजित है।

प्रस्तुत संस्करण की निम्न विशेषताएँ हैं—

1. विषय-वस्तु की भाषा-शैली को सरल-सहज व पूर्ण रूप से राजस्थान राज्य के अनुरूप रखा गया है जिससे कि विद्यार्थी ज्ञान को आसानी से समाहित कर सकें।
2. विभिन्न गणितीय सूत्रों का समावेश।
3. महत्त्वपूर्ण तथ्यों का समावेश।
4. पुस्तक में आवश्यकतानुसार हल सहित उदाहरण, प्रत्येक विषय-वस्तु के साथ दिये गये हैं, जिससे विद्यार्थी गणित विषय के सिद्धान्तों के अनुप्रयोगों को आसानी से समझ सकें।
5. NCERT के सभी प्रश्नों का हल पुस्तक के प्रत्येक अध्याय में समायोजित है।
6. प्रत्येक अध्याय के अन्त में महत्त्वपूर्ण प्रश्न (वस्तुनिष्ठ, रिक्त स्थान, अतिलघूत्तरात्मक, लघूत्तरात्मक एवं निबन्धात्मक) हल सहित दिये गये हैं, जिससे विद्यार्थी में आत्मविश्वास उत्पन्न हो।
7. प्रत्येक अध्याय के अन्त में विभिन्न प्रतियोगी परीक्षाओं में पूछे गये बहुविकल्पीय प्रश्नों को भी हल सहित दिया गया है।
8. इस पुस्तक में शिक्षा विभाग, राजस्थान द्वारा जारी प्रश्न बैंक के समस्त प्रश्नों को हल सहित यथास्थान दिया गया है, जिससे विद्यार्थियों को बोर्ड परीक्षा में मदद मिलेगी।

हमारे द्वारा भरसक प्रयास किया गया है कि यह पुस्तक विद्यार्थियों, अध्यापकों की आवश्यकताओं की पूर्ति करेगी तथा उनके लिए लाभदायक सिद्ध होगी।

आशा है कि यह पुस्तक C.B.S.E. के हिन्दी माध्यम के विद्यार्थियों के लिये भी मददगार सिद्ध होगी।

पुस्तक का नवीनतम संशोधित संस्करण नये कलेवर में प्रस्तुत किया जा रहा है। इसमें विषय विशेषज्ञों, शिक्षकों तथा पाठकों से प्राप्त बहुमूल्य सुझावों को भी उचित स्थान दिया गया है।

हम उन सभी विद्वानों, लेखकों के आभारी हैं जिनसे हमें निरन्तर प्रेरणा एवं मार्गदर्शन प्राप्त होते रहे हैं।

इस पुस्तक के प्रकाशन हेतु हम संजीव प्रकाशन के भी अत्यन्त आभारी हैं जिनके अथक तथा सतत प्रयासों से इस पुस्तक का प्रकाशन हो पाया है।

लेखक अपने परिश्रमपूर्ण प्रयास को तभी सफल मानेंगे जब यह पुस्तक सम्बन्धित छात्रों के लिए अधिक से अधिक लाभदायक सिद्ध होगी। प्रस्तुत पुस्तक को और अधिक उपयोगी बनाने हेतु शिक्षकों एवं पाठकगण के बहुमूल्य सुझावों का सहर्ष स्वागत किया जायेगा। अतः हम उनके आभारी रहेंगे।

लेखक

एस.सी. गुप्ता

डॉ. आर. वाधवानी

विषय-सूची

1. सम्बन्ध एवं फलन
(Relations and Functions) 1-43
2. प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन
(Inverse Trigonometric Functions) 44-77
3. आव्यूह
(Matrices) 78-139
4. सारणिक
(Determinants) 140-198
5. सांतत्य तथा अवकलनीयता
(Continuity and Differentiability) 199-290
6. अवकलज के अनुप्रयोग
(Application of Derivatives) 291-352

उच्च माध्यमिक परीक्षा, 2026

गणित (Mathematics)

समय : 3 घण्टे 15 मिनट

पूर्णांक : 80

परीक्षार्थियों के लिए सामान्य निर्देश :

- (1) परीक्षार्थी सर्वप्रथम अपने प्रश्न-पत्र पर नामांक अनिवार्यतः लिखें।
- (2) सभी प्रश्न करने अनिवार्य हैं।
- (3) प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दी गई उत्तर-पुस्तिका में ही लिखें।
- (4) जिन प्रश्नों में आन्तरिक खण्ड हैं, उन सभी के उत्तर एक साथ ही लिखें।
- (5) प्रश्न-पत्र के हिन्दी व अंग्रेजी रूपान्तर में किसी प्रकार की त्रुटि/अन्तर/विरोधाभास होने पर हिन्दी भाषा के प्रश्न को ही सही मानें।
- (6) प्रश्न का उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें।
- (7) प्रश्न संख्या 14 से 20 में आन्तरिक विकल्प दिये गए हैं।
- (8) प्रश्न संख्या 20 ग्राफ पेपर पर हल करना है।

खण्ड-अ (Section-A)

1. बहुविकल्पीय प्रश्न।

(i) यदि $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (3 - x^3)^{1/3}$ द्वारा प्रदत्त है, तो $f \circ f(x)$ बराबर है-

- (अ) $x^{1/3}$ (ब) x^3 [1]
(स) x (द) $(3 - x^3)$

(ii) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ का मुख्य मान है-

- (अ) $\frac{\pi}{4}$ (ब) $\frac{\pi}{6}$ (स) $\frac{\pi}{3}$ (द) $\frac{\pi}{2}$ [1]

(iii) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ एक वर्ग आव्यूह है यदि-

- (अ) $m < n$ (ब) $m > n$ [1]
(स) $m = n$ (द) इनमें से कोई नहीं

(iv) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ हो,

तो $(2A - B)$ होगा-

- (अ) $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ (ब) $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ [1]
(स) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ (द) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{vmatrix} x^2 - x + 1 & x - 1 \\ x + 1 & x + 1 \end{vmatrix}$ का मान होगा-

- (अ) $x^2 - x + 2$ (ब) $x^3 + x^2 - 2$ [1]
(स) $x^3 - x^2 + 2$ (द) $x^3 + x^2 + 4$

(vi) यदि $2x + 3y = \sin y$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ बराबर होगा-

- (अ) $\frac{3}{\sin y - 2}$ (ब) $\frac{2}{\cos y - 3}$ [1]

(स) $\frac{\cos y + 3}{2}$ (द) $\frac{2}{\cos y}$

(vii) यदि $y = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$, $0 < x < 1$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ बराबर होगा-

(अ) $\frac{1}{1+x^2}$ (ब) $\frac{2}{4+x}$

(स) $\frac{2}{1+x^2}$ (द) $\frac{2}{x+x^2}$

(viii) एक वृत्त की त्रिज्या $r = 5$ सेमी पर r के सापेक्ष क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर है-

- (अ) 12π (ब) 8π [1]
(स) 5π (द) 10π

(ix) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ बराबर है-

- (अ) $\tan x + \sin x + c$ (ब) $\tan x - \cot x + c$ [1]
(स) $\tan x \cot x + c$ (द) $2 \tan x - \cot 2x + c$

(x) वक्र $y^2 = 4x$, y -अक्ष एवं रेखा $y = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है-

- (अ) 2 (ब) $\frac{4}{9}$ (स) $\frac{9}{4}$ (द) $\frac{9}{2}$ [1]

(xi) अवकल समीकरण $2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + y = 0$ की कोटि है-

- (अ) 2 (ब) 1 [1]
(स) 0 (द) परिभाषित नहीं है

(xii) निम्न में से कौन-सी एक सदिश राशि है?

- (अ) समय (ब) आयतन [1]
(स) बल (द) गति

(xiii) सदिश $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = -2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$ और $\vec{c} = \hat{i} - 6\hat{j} - 7\hat{k}$ का योगफल है- [1]

- (अ) $-4\hat{j} - \hat{k}$ (ब) $4\hat{i} - \hat{k}$
(स) $4\hat{j} + 5\hat{k}$ (द) $\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$

(xiv) सदिश $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ के अनुदिश इकाई सदिश है- [1]

- (अ) $\frac{\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{5}}$ (ब) $\frac{\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{6}}$
(स) $\frac{2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{6}}$ (द) $\frac{\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}}{\sqrt{6}}$

(xv) यदि सरल रेखाएँ $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{\lambda} = \frac{z-1}{-1}$ तथा $\frac{x-1}{-\lambda} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{1}$ परस्पर लम्बवत् हैं, तो ' λ ' का मान है- [1]

- (अ) 0 (ब) 1 (स) 2 (द) 3

(xvi) 52 पत्तों की एक गड्डी में से यादृच्छया बिना प्रतिस्थापित किए गए दो पत्ते निकाले गए, तो दोनों पत्तों के काले रंग का होने की प्रायिकता है- [1]

- (अ) $\frac{1}{2}$ (ब) $\frac{1}{12}$ (स) $\frac{25}{102}$ (द) $\frac{1}{4}$

(xvii) यदि A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं तथा $P(A) = 0.3$ और $P(B) = 0.4$ हो, तो $P(A \cup B)$ का मान होगा- [1]

- (अ) 0.58 (ब) 0.70
(स) 0.12 (द) 0.10

(xviii) यदि पाँसों का एक जोड़ा उछाला जाता है, तो प्रत्येक पाँसे पर सम अभाज्य संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता होगी- [1]

- (अ) $\frac{1}{3}$ (ब) $\frac{1}{12}$ (स) $\frac{1}{36}$ (द) 0

2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(i) $\sin^{-1} x$ एक ऐसा फलन है, जिसका प्रांत है। [1]

(ii) सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ का मान है। [1]

(iii) एक परिवर्तनशील घन का किनारा 3 सेमी/से. की दर से बढ़ रहा है। घन का आयतन दर से बढ़ रहा है, जबकि किनारा 10 सेमी लम्बा है। [1]

(iv) $\int (2x - 3\cos x + e^x) dx = \dots\dots\dots$ [1]

(v) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ का व्यापक हल है। [1]

(vi) बिन्दुओं P(2, 3, 0) एवं Q(-1, -2, -4) को मिलाने वाला एवं P से Q की तरफ निर्देशित सदिश है। [1]

3. अति लघूत्तरात्मक प्रश्न।

(i) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ है, तो AB ज्ञात कीजिए। [1]

(ii) सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \sin \alpha & -\cos \alpha \\ -\sin \alpha & 0 & \sin \beta \\ \cos \alpha & -\sin \beta & 0 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए। [1]

(iii) यदि $y = \frac{e^x}{\sin x}$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। [1]

(iv) यदि $y = e^x + e^{x^2} + \dots + e^{x^5}$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। [1]

(v) हवा के एक बुलबुले की त्रिज्या $\frac{1}{2}$ सेमी/से. की दर से बढ़ रही है। बुलबुले का आयतन किस दर से बढ़ रहा है जबकि त्रिज्या 1 सेमी है? [1]

(vi) किसी उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय रुपयों में $R(x) = 13x^2 + 26x + 15$ से प्रदत्त है। सीमांत आय ज्ञात कीजिए जब $x = 7$ हैं। [1]

(vii) हल कीजिए $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ । [1]

(viii) वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [1]

(ix) सत्यापित कीजिए कि फलन $y = a \cos x + b \sin x$,

जिसमें $a, b \in \mathbb{R}$ अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

का हल है। [1]

(x) दो सदिश \vec{a} तथा \vec{b} के परिमाण क्रमशः $\sqrt{3}$ एवं 2 हैं और $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{6}$ है, तो \vec{a} तथा \vec{b} के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। [1]

(xi) दो बिन्दुओं (-2, 4, -5) और (1, 2, 3) से होकर गुजरने वाली रेखा की दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए। [1]

(xii) एक परिवार में दो बच्चे हैं। यदि यह ज्ञात हो कि बच्चों में कम से कम एक बच्चा लड़का है, तो दोनों बच्चों के लड़का होने की क्या प्रायिकता है? [1]

खण्ड-ब (Section-B)

लघूत्तरात्मक प्रश्न।

4. सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय \mathbb{R} में $R = \{(a, b) : a \leq b\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R स्वतुल्य तथा संक्रामक है किन्तु सममित नहीं है। [2]

5. दर्शाइए कि $\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}) = 2\sin^{-1}x, -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ । [2]

6. यदि $x \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$ है, तो x तथा y के मान ज्ञात कीजिए। [2]

7. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष $(1, 0)$, $(6, 0)$ और $(4, 3)$ हैं। [2]

8. यदि $x = \cos \theta - \cos 2\theta$, $y = \sin \theta - \sin 2\theta$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। [2]

9. यदि $y = \sin^{-1}x$ है, तो दर्शाइए $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$ है। [2]

10. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$ द्वारा प्रदत्त फलन f के स्थानीय उच्चतम और स्थानीय निम्नतम मान ज्ञात कीजिए। [2]

11. ज्ञात कीजिए $\int \frac{x^2}{1-x^6} dx$ । [2]

12. प्रथम चतुर्थांश में वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ एवं रेखाओं $x = 0$, $x = 2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [2]

13. उस समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी संलग्न भुजाएँ सदिश $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ द्वारा दी गई हैं। [2]

खण्ड-स (Section-C)

दीर्घ उत्तरात्मक प्रश्न।

14. ज्ञात कीजिए $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6 + a^6}} dx$ । [3]

अथवा

आंशिक भिन्नों का प्रयोग करते हुए ज्ञात कीजिए $\int \frac{1}{x^2 - 9} dx$ । [3]

15. अवकल समीकरण $\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = 2y$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। [3]

अथवा

अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 2x + x^2 \cot x (x \neq 0)$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए। दिया हुआ है कि $y = 0$ यदि $x = \frac{\pi}{2}$ । [3]

16. दर्शाइए कि दिक्-कोसाइन $\frac{12}{13}, \frac{-3}{13}, \frac{-4}{13}; \frac{4}{13}, \frac{12}{13}, \frac{3}{13}; \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}, \frac{3}{13}$ वाली तीनों रेखाएँ परस्पर लम्बवत हैं। [3]

अथवा

स्थिति सदिश $2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ वाले बिन्दु से गुजरने वाली तथा $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ की दिशा में जाने वाली रेखा का सदिश और कार्तीय रूपों में समीकरण ज्ञात कीजिए। [3]

17. यह दिया गया है कि दो पांसें को फेंकने पर प्राप्त दो संख्याएँ भिन्न-भिन्न हैं। दोनों संख्याओं का योग 4 होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। [3]

अथवा

एक पांसे को एक बार उछाला जाता है। घटना 'पांसे पर प्राप्त संख्या 3 का अपवर्त्य है' को E से और 'पांसे पर प्राप्त संख्या सम है' को F से निरूपित किया जाए तो बताएँ क्या घटनाएँ E और F स्वतंत्र हैं। [3]

खण्ड-द (Section-D)

निबंधात्मक प्रश्न।

18. $\int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 1}$ का मान ज्ञात कीजिए। [4]

अथवा

$\int \sqrt{3 - 2x - x^2} dx$ ज्ञात कीजिए। [4]

19. रेखा युग्म $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ और $\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{8}$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए। [4]

अथवा

P का मान ज्ञात कीजिए ताकि रेखाएँ $\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2P} = \frac{z-3}{2}$

और $\frac{7-7x}{3P} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$ परस्पर लम्ब हों। [4]

20. आलेखीय विधि द्वारा उद्देश्य फलन $z = 4x + y$ का अधिकतम मान निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत ज्ञात कीजिए। [4]

$x + y \leq 50$

$3x + y \leq 90$

तथा $x \geq 0, y \geq 0$

अथवा

आलेखीय विधि द्वारा उद्देश्य फलन $z = 200x + 500y$ का न्यूनतम मान निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत ज्ञात कीजिए। [4]

$x + 2y \geq 10$

$3x + 4y \leq 24$

तथा $x \geq 0, y \geq 0$



गणित भाग-1 (कक्षा-12)

सम्बन्ध एवं फलन (RELATIONS AND FUNCTIONS)

1

अध्याय

- 1.1 भूमिका (Introduction)
- 1.2 क्रमित युग्म (Ordered Pair)
- 1.3 दो समुच्चयों का कार्तीय गुणन (Cartesian Product of Two Sets)
- 1.4 सम्बन्ध (Relation)
- 1.5 सम्बन्ध का प्रांत तथा परिसर (Domain and Range of a Relation)
- 1.6 प्रतिलोम सम्बन्ध (Inverse Relation)
- 1.7 सम्बन्धों के प्रकार (Types of Relations)
- 1.8 स्वतुल्य सम्बन्ध (Reflexive Relation)
- 1.9 सममित सम्बन्ध (Symmetric Relation)
- 1.10 संक्रामक सम्बन्ध (Transitive Relation)
- 1.11 तुल्यता सम्बन्ध (Equivalence Relation)
- 1.12 तत्समक सम्बन्ध (Identity Relation)
- 1.13 तुच्छ सम्बन्ध (Trivial Relation)
- 1.14 फलनों के प्रकार (Types of Functions)
- 1.15 एकैकी फलन (One-One Function or Injective Function)
- 1.16 बहु-एकी फलन (Many-One Function)
- 1.17 अन्तर्क्षेपी फलन (Into Function)
- 1.18 एकैकी अन्तर्क्षेपी फलन (One-One Into Function)
- 1.19 बहु-एकी अन्तर्क्षेपी फलन (Many-One Into Function)
- 1.20 आच्छादक फलन (Onto or Surjective Function)
- 1.21 एकैकी आच्छादक फलन (One-One Onto Function or Bijection)
- 1.22 बहु-एकी आच्छादक फलन (Many-One Onto Function)
- 1.23 तत्समक फलन (Identity Function)
- 1.24 अचर फलन (Constant Function)
- 1.25 फलनों का संयोजन तथा व्युत्क्रमणीय फलन (Composition of Functions and Invertible Function)

1.1 भूमिका (INTRODUCTION)

☆ कक्षा XI में हम समुच्चय, उपसमुच्चय, कार्तीय गुणन, सम्बन्ध, प्रान्त व सहप्रान्त, सम्बन्ध का परिसर, फलन, फलन का प्रान्त, सहप्रान्त तथा परिसर का विस्तार से अध्ययन कर चुके हैं। इस अध्याय में कक्षा XI की उपरोक्त परिभाषाओं का प्रत्यास्मरण कर सम्बन्धों तथा फलनों के प्रकारों का विस्तार से अध्ययन करेंगे।

1.2 क्रमित युग्म (ORDERED PAIR)

☆ सामान्यतः समुच्चय के अवयवों के क्रम में परिवर्तन करने पर

समुच्चय में कोई भी परिवर्तन नहीं होता। जैसे $\{1, 2\} = \{2, 1\}$ लेकिन यदि किसी समुच्चय में अवयवों के क्रम का भी महत्व हो तो ऐसे समुच्चय को क्रमित समुच्चय (ordered set) कहते हैं। इसी प्रकार यदि दो अवयवों वाले समुच्चय $\{a, b\}$ में a का पहला स्थान तथा b का दूसरा स्थान निर्धारित कर दिया जाये तो यह समुच्चय क्रमित युग्म (Ordered Pair) कहलाता है तथा इसे संकेत (a, b) द्वारा व्यक्त किया जाता है। यहाँ $(a, b) \neq (b, a)$ परिभाषा से स्पष्ट है कि

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ तथा } b = d$$

- ☆ यदि किसी क्रमित समुच्चय में अवयवों की संख्या n हो तो ऐसे समुच्चय को क्रमित n - ट्युपल (Ordered n -tuple) कहा जाता है तथा इसे (a_1, a_2, \dots, a_n) से व्यक्त करते हैं। जैसे—द्विविमीय निर्देशांक (x, y) तथा त्रिविमीय निर्देशांक (x, y, z) में क्रम का महत्व है।

1.3 दो समुच्चयों का कार्तीय गुणन (CARTESIAN PRODUCT OF TWO SETS)

- ☆ दो समुच्चयों A और B का कार्तीय गुणन उन क्रमित युग्मों (a, b) का समुच्चय होता है जिनका पहला अवयव a , समुच्चय A का अवयव हो तथा दूसरा अवयव b , समुच्चय B का अवयव हो। इस गुणन को संकेत $A \times B$ द्वारा व्यक्त किया जाता है अतः
- $$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

- ☆ परिभाषा से स्पष्ट है कि $A \times B \neq B \times A$ जब तक कि A और B बराबर न हों।

☞ उदाहरण—यदि $A = \{p, q, r\}$ तथा $B = \{x, y\}$ हो तो $A \times B = \{(p, x), (p, y), (q, x), (q, y), (r, x), (r, y)\}$
 $B \times A = \{(x, p), (y, p), (x, q), (y, q), (x, r), (y, r)\}$

- ☆ टिप्पणियाँ—

- यदि $A = \phi$ अथवा $B = \phi$, तब $A \times B = \phi$ यहाँ ϕ रिक्त समुच्चय है।
- यदि $A = \phi$ तथा $B = \phi$, तब $A \times B = \phi$
- यदि समुच्चय A में अवयवों की संख्या m तथा समुच्चय B में अवयवों की संख्या n हो तो $A \times B$ में $m \times n$ अवयव होंगे अतः इसके अरिक्त उपसमुच्चयों की संख्या $2^{m \times n} - 1$ होगी।
- यदि A तथा B अरिक्त समुच्चय हों तथा उनमें से एक अथवा दोनों अपरिमित समुच्चय हों तो $A \times B$ में अवयवों की संख्या अनन्त होगी अर्थात् $A \times B$ भी एक अपरिमित समुच्चय होगा।
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \times C \subseteq B \times C$
- $A \subseteq B, C \subseteq D \Rightarrow (A \times C) \subseteq (B \times D)$

1.4 सम्बन्ध (RELATION)

- ☆ समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित सम्बन्ध R , कार्तीय गुणन $A \times B$ का कोई उपसमुच्चय होता है। अर्थात् $R \subseteq A \times B$ । इसे प्रायः निम्न प्रकार से लिखते हैं—

$$R = \{(x, y) \mid xRy, x \in A, y \in B\}$$

- ☆ a और b सम्बन्ध R द्वारा सम्बन्धित हैं तो इस तथ्य को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं—

$$a R b \text{ या } (a, b) \in R$$

- ☆ a और b सम्बन्ध R द्वारा सम्बन्धित नहीं हैं तो तथ्य को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं—

$$a \not R b \text{ या } (a, b) \notin R$$

☞ उदाहरण 1. यदि $A = \{3, 5, 7, 9\}$, $B = \{4, 6, 8, 10\}$ तथा $P(x, y) = x, y$ से छोटा है, तब

$$R = \{A, B, P(x, y)\}$$

A से B में एक सम्बन्ध है। इस सम्बन्ध के अन्तर्गत $3R4, 3R6, 3R8, 3R10, 5R6, 5R8, 5R10, 7R8, 7R10, 9R10$, लेकिन $5 \not R 4, 7 \not R 4, 7 \not R 6, 9 \not R 4, 9 \not R 6, 9 \not R 8$,

इसे हम इस प्रकार से भी व्यक्त कर सकते हैं—

$(3, 4) \in R, (3, 6) \in R, (3, 8) \in R, (3, 10) \in R, (5, 6) \in R, (5, 8) \in R, (5, 10) \in R, (7, 8) \in R, (7, 10) \in R, (9, 10) \in R$, परन्तु $(5, 4) \notin R, (7, 4) \notin R, (7, 6) \notin R, (9, 4) \notin R, (9, 6) \notin R, (9, 8) \notin R$ इत्यादि। तब $R = \{(3, 4), (3, 6), (3, 8), (3, 10), (5, 6), (5, 8), (5, 10), (7, 8), (7, 10), (9, 10)\}$

☞ उदाहरण 2. यदि $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{3, 6, 8\}$ तथा $P(x, y) = x, y$ का भाजक है, तब

$$R = \{A, B, P(x, y)\}$$

A से B में एक सम्बन्ध है। इस सम्बन्ध के अन्तर्गत $2R6, 2R8, 3R3, 3R6, 4R8$ लेकिन $2 \not R 3, 3 \not R 8, 4 \not R 3, 4 \not R 6$, अर्थात् $(2, 6) \in R, (2, 8) \in R, (3, 3) \in R, (3, 6) \in R, (4, 8) \in R$, परन्तु $(2, 3) \notin R, (3, 8) \notin R, (4, 3) \notin R, (4, 6) \notin R$ इत्यादि।

☞ उदाहरण 3. यदि $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 4, 6, 9\}$ तथा $P(x, y) : x$ का दुगुना y है तब $R = \{A, B, P(x, y)\}$ A से B में एक सम्बन्ध है जिसके अन्तर्गत $2R4, 3R6$ लेकिन $1 \not R 4, 3 \not R 9$ इत्यादि। इसे हम इस प्रकार भी व्यक्त कर सकते हैं—
 $(2, 4) \in R, (3, 6) \in R$, परन्तु $(1, 4) \notin R, (3, 9) \notin R$ इत्यादि।

- ☆ टिप्पणी—उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि

- यह आवश्यक नहीं है कि A के प्रत्येक अवयव का सम्बन्ध B के किसी न किसी अवयव से हो अर्थात् A में ऐसे अवयव हो सकते हैं जो B के किसी अवयव से सम्बन्धित नहीं हों।
- A के किसी अवयव का सम्बन्ध B के एक या अधिक अवयवों से हो सकता है।
- A के एक से अधिक अवयवों का सम्बन्ध B के एक अवयव से हो सकता है।
- A के किसी भी अवयव का सम्बन्ध B के किसी भी अवयव से नहीं भी हो सकता है।
- A के सभी अवयवों का सम्बन्ध B के सभी अवयवों से हो सकता है।

- ☆ नोट—यदि A तथा B में अवयवों की संख्या क्रमशः m तथा n हो तो $A \times B$ में अवयवों की संख्या $m \times n$ होगी। इसके अरिक्त

उपसमुच्चयों की संख्या $2^{mn} - 1$ होगी। अर्थात् A से B में परिभाषित होने वाले अरिक्त सम्बन्धों की संख्या भी $2^{mn} - 1$ होगी।

1.5 सम्बन्ध का प्रान्त तथा परिसर (DOMAIN AND RANGE OF A RELATION)

☆ यदि R, समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित कोई सम्बन्ध हो, तो R के क्रमित युग्मों के प्रथम अवयवों के समुच्चय को सम्बन्ध R का प्रान्त (Domain) तथा द्वितीय अवयवों के समुच्चय को सम्बन्ध R का परिसर (Range) कहते हैं। अतः

$$R \text{ का प्रान्त} = \{a | (a, b) \in R\}$$

$$R \text{ का परिसर} = \{b | (a, b) \in R\}$$

उपर्युक्त से स्पष्ट है कि R का प्रान्त A का उपसमुच्चय तथा R का परिसर B का उपसमुच्चय होगा।

☞ उदाहरण 1. यदि $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{3, 5, 9\}$ तथा A से B में एक सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित है कि $xRy \Leftrightarrow x, y$ से बड़ा है, तब

$$R = \{(4, 3), (6, 3), (6, 5), (8, 3), (8, 5)\}$$

उपर्युक्त सम्बन्ध में

$$R \text{ का प्रान्त} = \{4, 6, 8\}$$

$$R \text{ का परिसर} = \{3, 5\}$$

☞ उदाहरण 2. यदि $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ तथा $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

माना $R = \{(a, b) | a \in A, b \in B, a, b \text{ का भाजक है}\}$

A से B में एक सम्बन्ध हो तब

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (1, 10), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 10), (3, 6), (4, 4), (4, 8), (5, 10)\}$$

अतः R का प्रान्त = $\{1, 2, 3, 4, 5\} = A$

R का परिसर = $\{2, 4, 6, 8, 10\} = B$

☞ उदाहरण 3. Z में परिभाषित एक सम्बन्ध

$$R = \{(x, y) | x, y \in Z, x^2 + y^2 \leq 4\}$$

तब R का प्रान्त = $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

तथा R का परिसर = $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

☞ उदाहरण 4. यदि N पर $R = \{(x, y) : x + 2y = 8\}$ एक सम्बन्ध है, तो R का परिसर लिखिए।

हल—यहाँ $xRy \Leftrightarrow x + 2y = 8$

$$\Leftrightarrow y = \frac{8-x}{2}, x \in N, y \in N$$

$$\text{जब } x = 2, y = \frac{8-2}{2} = 3 \in N$$

$$x = 4, y = \frac{8-4}{2} = 2 \in N$$

$$x = 6, y = \frac{8-6}{2} = 1 \in N$$

$$x = 8, y = \frac{8-8}{2} = 0 \notin N$$

अतः R का परिसर = $\{1, 2, 3\}$ उत्तर

1.6 प्रतिलोम सम्बन्ध (INVERSE RELATION)

☆ माना R, समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित एक सम्बन्ध है। तब R का प्रतिलोम सम्बन्ध R^{-1} , समुच्चय B से समुच्चय A में निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है—

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in R\}$$

$$\text{अर्थात् } (a, b) \in R \Leftrightarrow (b, a) \in R^{-1}$$

$$\text{या } aRb \Leftrightarrow bR^{-1}a$$

परिभाषा से स्पष्ट है कि R^{-1} का प्रान्त = R का परिसर तथा R^{-1} का परिसर = R का प्रान्त

☞ उदाहरण 1. यदि $A = \{1, 2, 3\}$, और $B = \{0, 4\}$ तथा सम्बन्ध R, समुच्चय A से समुच्चय B में इस प्रकार परिभाषित है कि

$$R = \{(1, 0), (2, 0), (3, 0)\}$$

तब R का प्रतिलोम सम्बन्ध होगा—

$$R^{-1} = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3)\}$$

उपर्युक्त से स्पष्ट है कि

R^{-1} का प्रान्त = $\{0\} = R$ का परिसर

R^{-1} का परिसर = $\{1, 2, 3\} = R$ का प्रान्त

☞ उदाहरण 2. यदि N में सम्बन्ध “x, y से छोटा है” द्वारा परिभाषित हो तो $R = \{(x, y) | x, y \in N, x < y\}$ तो इसका प्रतिलोम सम्बन्ध $R^{-1} = \{(x, y) | x, y \in N, x > y\}$ जो “x, y से बड़ा है” द्वारा परिभाषित है।

1.7 सम्बन्धों के प्रकार (TYPES OF RELATIONS)

☆ सम्बन्ध निम्न प्रकार के होते हैं—

- स्वतुल्य सम्बन्ध (Reflexive Relation)
- सममित सम्बन्ध (Symmetric Relation)
- संक्रामक सम्बन्ध (Transitive Relation)
- तुच्छ सम्बन्ध (Trivial Relation)

1.8 स्वतुल्य सम्बन्ध (REFLEXIVE RELATION)

☆ यदि सम्बन्ध R किसी समुच्चय A में इस प्रकार परिभाषित हो कि इसके अन्तर्गत A का प्रत्येक अवयव स्वयं से सम्बन्धित हो, तो सम्बन्ध R स्वतुल्य सम्बन्ध कहलाता है। अतः R स्वतुल्य सम्बन्ध है यदि और केवल यदि $aRa \forall a \in A$

अर्थात् R स्वतुल्य सम्बन्ध है $\Leftrightarrow (a, a) \in R, \forall a \in A$

☆ उपर्युक्त परिभाषा से स्पष्ट है कि A में परिभाषित सम्बन्ध R स्वतुल्य सम्बन्ध नहीं होगा यदि A में कम से कम एक अवयव a ऐसा हो, जो स्वयं से सम्बन्धित न हो अर्थात् $(a, a) \notin R$

☆ किसी समुच्चय A में परिभाषित स्वतुल्य सम्बन्ध R तथा तत्समक सम्बन्ध I_A की परिभाषाओं से स्पष्ट होता है कि I_A, R का उपसमुच्चय (Subset) होता है, अर्थात् $I_A \subseteq R$

अतः किसी समुच्चय A का तत्समक सम्बन्ध I_A , आवश्यक रूप से A में एक स्वतुल्य सम्बन्ध होता है, परन्तु A में