NCERT के पूर्णतया संशोधित नवीनतम् पाठ्यक्रम पर आधारित

संजीव®

गणित

कक्षा-11 (भाग-2)

माध्यमिक शिक्षा बोर्ड, राजस्थान के विद्यार्थियों के लिए

लेखक :

एस. सी. गुप्ता

एम.एससी., एम.एड.

वरिष्ठ व्याख्याता गणित

संजीव प्रकाशन

जयपुर-3

मूल्य : ₹ 400/-

- प््रकाशक :

संजीव प्रकाशन

धामाणी मार्केट, चौड़ा रास्ता,

जयपुर-3

email : sanjeevprakashanjaipur@gmail.com
website : www.sanjivprakashan.com

- **मूल्य : ₹ 400.00**

- लेजर कम्पोजिंग :

संजीव प्रकाशन (D.T.P. Department), जयपुर

- मुद्रक :

मनोहर आर्ट प्रिन्टर्स, जयपुर

*****

भूमिका

ज्ञान एवं विज्ञान में तीव्र गति से हो रही वृद्धि को ध्यान में रखते हुए प्रस्तुत पुस्तक **'गणित भाग-2'** का यह संस्करण राजस्थान बोर्ड द्वारा स्वीकृत **कक्षा-11 के नवीनतम संशोधित N.C.E.R.T. पाठ्यक्रमानुसार** लिखा गया है। प्रस्तुत सन्दर्भ पुस्तक इस कक्षा में आने वाले विज्ञान, वाणिज्य एवं कला वर्ग के विद्यार्थियों के स्तर को ध्यान में रखकर लिखी गयी है।

पुस्तक का निर्माण करते समय इस बात का विशेष ध्यान रखा गया है कि पुस्तक की विषय-सामग्री एवं सिद्धान्तों को सरल भाषा में प्रस्तुत कर छात्रों की विषय के प्रति रुचि पैदा हो।

प्रस्तुत संस्करण की निम्न विशेषताएँ हैं—

1. विषय-वस्तु की भाषा-शैली को सरल-सहज व पूर्ण रूप से राजस्थान राज्य के अनुरूप रखा गया है जिससे कि विद्यार्थी ज्ञान को आसानी से समाहित कर सकें।
2. महत्त्वपूर्ण तथ्यों का समावेश।
3. पुस्तक में आवश्यकतानुसार हल सहित उदाहरण, प्रत्येक विषय-वस्तु के साथ दिये गये हैं, जिससे विद्यार्थी गणित विषय के सिद्धान्तों के अनुप्रयोगों को आसानी से समझ सकें।
4. NCERT के सभी प्रश्नों का हल पुस्तक के प्रत्येक अध्याय में समायोजित है।
5. प्रत्येक अध्याय के अन्त में ***महत्त्वपूर्ण प्रश्न (वस्तुनिष्ठ,*** **रिक्त स्थान,** ***अतिलघूत्तरात्मक, लघूत्तरात्मक एवं निबन्धात्मक) हल सहित दिये गये हैं,*** जिससे विद्यार्थी में आत्मविश्वास उत्पन्न हो।
6. प्रत्येक अध्याय के अन्त में **विभिन्न प्रतियोगी परीक्षाओं में पूछे गये बहुविकल्पीय प्रश्नों** ***को भी हल सहित*** दिया गया है।

हमारे द्वारा भरसक प्रयास किया गया है कि यह पुस्तक विद्यार्थियों, अध्यापकों की आवश्यकताओं की पूर्ति करेगी तथा उनके लिए लाभदायक सिद्ध होगी।

आशा है कि यह पुस्तक C.B.S.E. के हिन्दी माध्यम के विद्यार्थियों के लिये भी मददगार सिद्ध होगी।

पुस्तक का नवीनतम संशोधित संस्करण नये कलेवर में प्रस्तुत किया जा रहा है। इसमें विषय विशेषज्ञों, शिक्षकों तथा पाठकों से प्राप्त बहुमूल्य सुझावों को भी उचित स्थान दिया गया है।

हम उन सभी विद्वानों, लेखकों के आभारी हैं जिनसे हमें निरन्तर प्रेरणा एवं मार्गदर्शन प्राप्त होते रहे हैं।

इस पुस्तक के प्रकाशन हेतु हम संजीव प्रकाशन के भी अत्यन्त आभारी हैं जिनके अथक तथा सतत प्रयासों से इस पुस्तक का प्रकाशन हो पाया है।

लेखक अपने परिश्रमपूर्ण प्रयास को तभी सफल मानेंगे जब यह पुस्तक सम्बन्धित छात्रों के लिए अधिक से अधिक लाभदायक सिद्ध होगी। प्रस्तुत पुस्तक को और अधिक उपयोगी बनाने हेतु शिक्षकों एवं पाठकगण के बहुमूल्य सुझावों का सहर्ष स्वागत किया जायेगा। अत: हम उनके आभारी रहेंगे।

लेखक

एस.सी. गुप्ता

डॉ. आर. वाधवानी

विषय-सूची

गणित भाग-2 (कक्षा 11)

अनुक्रम तथा श्रेणी
(Sequence and Series)

8 अध्याय

8.1 भूमिका
(Introduction)

सामान्यत: अंग्रेजी भाषा में शब्द **'अनुक्रम'** का आशय है **''वस्तुओं का ऐसा संग्रह जिसमें प्रत्येक वस्तु अपनी पूर्व वस्तु से इस प्रकार क्रमित है कि उन्हें प्रथम, द्वितीय, तृतीय, चतुर्थ आदि के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।''** गणित विषय के अन्तर्गत अनुक्रम का प्रयोग उसी अर्थ में किया जाता है जिस अर्थ में अंग्रेजी भाषा में इस शब्द का प्रयोग किया जाता है।

शब्द 'श्रेणी' से हमारा अभिप्राय उन अनुक्रमों से होगा, जिनके अवयव **एक विशेष नियम या पैटर्न** का पालन करते हैं। पिछली कक्षा में, हम समान्तर श्रेढ़ी के सम्बन्ध में पढ़ चुके हैं। इस अध्याय में समान्तर श्रेढ़ी के बारे में और अधिक चर्चा करने के साथ-साथ हम समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य, समान्तर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य में सम्बन्ध, विशेष अनुक्रमों के क्रमागत n प्राकृत संख्याओं का योग, n प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग तथा n प्राकृत संख्याओं के घनों के योग का भी अध्ययन करेंगे।

8.2 अनुक्रम
(Sequence)

संख्याओं का वह विन्यास (Arrangement) जो किसी नियम के अनुसार एक निश्चित क्रम में किया गया हो, अर्थात् यदि राशियाँ किसी क्रम में निश्चित नियमानुसार हों, तो उसे अनुक्रम (Sequence) कहते हैं। अनुक्रम की प्रत्येक संख्या उसका पद (Term) कहलाती है।

अनुक्रमों के कुछ उदाहरण (Some examples of Sequences)—

(i) 1, 3, 5, 7, 9, ... पर विचार कीजिये, इस अनुक्रम में प्रत्येक क्रमागत पद पूर्व पद में '2' का योग करने पर प्राप्त होता है। इस अनुक्रम के nवें पद को $a_n = 2n - 1$ के रूप में लिख सकते हैं। जहाँ n एक प्राकृत संख्या है।

(ii) 3, –9, 27, –81.............. पर विचार कीजिए। इस अनुक्रम का प्रत्येक पद पूर्व की '–3' से गुणा करने पर प्राप्त होता है। अनुक्रम का nवाँ पद $a_n = (-1)^{n-1} . 3^n$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

जहाँ n एक प्राकृत संख्या है।

8.3 अनुक्रम के प्रकार (Types of Sequence)

अनुक्रम दो प्रकार के होते हैं—

(a) परिमित अनुक्रम (Finite sequence)

(b) अपरिमित अनुक्रम (Infinite sequence)

यदि किसी अनुक्रम में पदों की संख्या निश्चित हो तो उसे **परिमित अनुक्रम** कहते हैं।

यदि किसी अनुक्रम में पदों की संख्या अनिश्चित हो तो उसे **अपरिमित अनुक्रम** कहते हैं।

दूसरे शब्दों में इसे इस प्रकार कहा जा सकता है कि कोई अनुक्रम परिमित अथवा अपरिमित होता यदि उसका डोमेन प्राकृत संख्या का समुच्चय N है अथवा उसका कोई परिमित उप-समुच्चय है।

8.4 श्रेणियाँ (Series)

यदि a_n कोई अनुक्रम है तब वह व्यंजक रूप $a_1 + a_2 + a_3 +$ .... है, श्रेणी कहलाता है। दूसरे शब्दों में अनुक्रम के पदों a_1, a_2, a_3, a_4........ का योगफल है जिन्हें श्रेणी के क्रमशः प्रथम पद, द्वितीय पद, तृतीय पद, चतुर्थ पद, ... कहते हैं।

8.5 श्रेणियों के प्रकार (Types of Series)

श्रेणियाँ दो प्रकार की होती हैं—(i) परिमित श्रेणियाँ तथा (ii) अपरिमित श्रेणियाँ।

वह श्रेणी जिसमें पदों की संख्या सीमित होती है, उसे हम परिमित श्रेणी कहते हैं और वे श्रेणियाँ जिसमें पदों की संख्या अपरिमित होती है उसे अपरिमित श्रेणी कहते हैं।

श्रेणी को संधि रीति में प्रदर्शित करते हैं, जिसे सिग्मा संकेत कहते हैं। इसके लिए ग्रीक अक्षर संकेत $\sum$ (सिग्मा) का उपयोग करते हैं, जिसका अर्थ है, जोड़ना। इस प्रकार, श्रेणी $a_1 + a_2 + a_3 +$ .... + a_n का संक्षिप्त रूप $\sum_{k=1}^{n} a_k$ है।

उदाहरण 1. दी गई परिभाषाओं के आधार पर निम्नलिखित प्रत्येक अनुक्रम के प्रथम तीन पद बताइये। (NCERT)

(i) $a_n = 2n + 5$ (ii) $a_n = \frac{n-3}{4}$

हल—(i) दिया है—

$$a_n = 2n + 5$$

n = 1, 2 तथा 3 रखने पर

$$a_1 = 2 \times 1 + 5 = 2 + 5 = 7$$
$$a_2 = 2 \times 2 + 5 = 4 + 5 = 9$$
$$a_3 = 2 \times 3 + 5 = 6 + 5 = 11$$

इसलिये, वांछित पद 7, 9 तथा 11 हैं।

(ii) दिया है—

$$a_n = \frac{n-3}{4}$$

n = 1, 2 तथा 3 रखने पर

$$a_1 = \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$a_2 = \frac{2-3}{4} = \frac{-1}{4}$$

$$a_3 = \frac{3-3}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

अतः अभीष्ट प्रथम तीन पद $\frac{-1}{2}$, $\frac{-1}{4}$ एवं 0 हैं।

उदाहरण 2. $a_n = (n - 1) (2 - n) (3 + n)$ द्वारा परिभाषित अनुक्रम का 20वाँ पद क्या है? (NCERT)

हल—यहाँ पर

$$a_n = (n - 1) (2 - n) (3 + n)$$

n = 20 रखने पर

$$a_{20} = (20 - 1) (2 - 20) (3 + 20)$$
$$= (19) \times (- 18) \times (23)$$
$$= - 7866$$

उदाहरण 3. माना कि अनुक्रम a_n निम्नलिखित रूप में परिभाषित है—

$$a_n = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + 2 \text{ for } n \geq 2$$

तो अनुक्रम के पाँच पद ज्ञात कीजिये तथा संगत श्रेणी लिखिये। (NCERT)

हल—यहाँ $a_1 = 1$

$a_n = a_{n-1} + 2$ for $n \geq 2$

यहाँ पर n का मान 2 और 2 से बड़ा है।

इसलिए $a_2 = a_{2-1} + 2 = a_1 + 2$

a_1 का मान रखने पर

तब $a_2 = 1 + 2 = 3$

अब $a_3 = a_{3-1} + 2 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5$

$$a_4 = a_{4-1} + 2 = a_3 + 2 = 5 + 2 = 7$$
$$a_5 = a_{5-1} + 2 = a_4 + 2 = 7 + 2 = 9$$

अतः अनुक्रम के प्रथम पाँच पद 1, 3, 5, 7 तथा 9 हैं और इसकी संगत श्रेणी 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ... है।

उदाहरण 4. निम्नलिखित अनुक्रमों के nवें पद दिये गये हैं, इनके प्रथम चार पद ज्ञात कीजिये।

(i) $\frac{(n+1)^2}{n}$ (ii) $2n^2 - n + 2$

हल—(i) दिया है—$a_n = \frac{(n+1)^2}{n}$

$n = 1, 2, 3, 4$ रखने पर

$$a_1 = \frac{(1+1)^2}{1} = \frac{(2)^2}{1} = \frac{4}{1} = 4$$
$$a_2 = \frac{(2+1)^2}{2} = \frac{(3)^2}{2} = \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$
$$a_3 = \frac{(3+1)^2}{3} = \frac{(4)^2}{3} = \frac{16}{3}$$
$$a_4 = \frac{(4+1)^2}{4} = \frac{5^2}{4} = \frac{25}{4}$$

अतः अनुक्रम के प्रथम चार पद 4, $\frac{9}{2}$, $\frac{16}{3}$ व $\frac{25}{4}$ हैं।

(ii) दिया है—$a_n = 2n^2 - n + 2$

$n = 1, 2, 3, 4$ रखने पर

$$a_1 = 2(1)^2 - 1 + 2 = 2 - 1 + 2 = 3$$
$$a_2 = 2(2)^2 - 2 + 2 = 2 \times 4 = 8$$
$$a_3 = 2(3)^2 - 3 + 2 = 18 - 3 + 2 = 17$$
$$a_4 = 2(4)^2 - 4 + 2 = 32 - 4 + 2 = 30$$

अतः अनुक्रम के प्रथम चार पद 3, 8, 17 और 30 हैं।

उदाहरण 5. यदि $T_n = an^2 + bn + c$ तथा $T_1 = 10$, $T_2 = 19$ तथा $T_3 = 32$, तो a, b तथा c के मान ज्ञात कीजिये।

हल—दिया है— $T_1 = 10$, $T_2 = 19$ तथा $T_3 = 32$

तथा $T_n = an^2 + bn + c$

$\therefore$ $T_1 = a(1)^2 + b(1) + c = a + b + c$

$\therefore$ $a + b + c = 10$ ....(i)

$\because$ $T_1 = 10$

$T_2 = 19 = a(2)^2 + b(2) + c$

$19 = 4a + 2b + c$ ....(ii)

$T_3 = 32 = a(3)^2 + b(3) + c$

$32 = 9a + 3b + c$ ....(iii)

समीकरण (ii) — समीकरण (i) से

$3a + b = 9$ ....(iv)

समीकरण (iii) — समीकरण (ii) से

$5a + b = 13$ ....(v)

समीकरण (v) — समीकरण (iv)

$2a = 4$ $\therefore a = 2$

समीकरण (iv) से

$3 \times 2 + b = 9 \Rightarrow b = 3$

समीकरण (i) से

$a + b + c = 10$

$2 + 3 + c = 10 \Rightarrow c = 5$

अतः $a = 2$, $b = 3$ तथा $c = 5$ **उत्तर**

प्रश्नावली 8.1

प्रश्न 1 से 6 तक के अनुक्रमों में प्रत्येक के प्रथम पाँच पद लिखिए, जिनका nवाँ पद दिया गया है—

1. $a_n = n(n + 2)$

हल— $\because a_n = n(n + 2)$

प्रथम पद = $n = 1$ रखने पर $a_1 = 1(1 + 2) = 3$

द्वितीय पद = $n = 2$ रखने पर $a_2 = 2(2 + 2) = 8$

तृतीय पद = $n = 3$ रखने पर $a_3 = 3(3 + 2) = 15$

चतुर्थ पद = $n = 4$ रखने पर $a_4 = 4(4 + 2) = 24$

पंचम पद = $n = 5$ रखने पर $a_5 = 5(5 + 2) = 35$

$\therefore$ प्रथम पाँच पद = 3, 8, 15, 24 व 35 हैं। **उत्तर**

2. $a_n = \frac{n}{n+1}$

हल— $\because$ $a_n = \frac{n}{n+1}$

प्रथम पद = $n = 1$ रखने पर $a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

द्वितीय पद = $n = 2$ रखने पर $a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$

तृतीय पद = $n = 3$ रखने पर $a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$

चतुर्थ पद = $n = 4$ रखने पर $a_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$

पंचम पद = $n = 5$ रखने पर $a_5 = \frac{5}{5+1} = \frac{5}{6}$

अतः प्रथम पाँच पद = $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ व $\frac{5}{6}$ हैं। **उत्तर**

3. $a_n = 2^n$

हल— $\because$ $a_n = 2^n$

प्रथम पद = $n = 1$ रखने पर $a_1 = 2^1 = 2$

द्वितीय पद = $n = 2$ रखने पर $a_2 = 2^2 = 4$

तृतीय पद = $n = 3$ रखने पर $a_3 = 2^3 = 8$

चतुर्थ पद = $n = 4$ रखने पर $a_4 = 2^4 = 16$

पंचम पद = $n = 5$ रखने पर $a_5 = 2^5 = 32$

अतः प्रथम पाँच पद = 2, 4, 8, 16 व 32 हैं। **उत्तर**

4. $a_n = \frac{2n-3}{6}$

हल— $\because a_n = \frac{2n-3}{6}$

प्रथम पद = $n = 1$ रखने पर $a_1 = \frac{2(1)-3}{6} = \frac{2-3}{6} = -\frac{1}{6}$

द्वितीय पद = $n = 2$ रखने पर $a_2 = \frac{2(2)-3}{6} = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}$

तृतीय पद = $n = 3$ रखने पर $a_3 = \frac{2(3)-3}{6} = \frac{6-3}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

चतुर्थ पद = $n = 4$ रखने पर $a_4 = \frac{2(4)-3}{6} = \frac{8-3}{6} = \frac{5}{6}$

पंचम पद = $n = 5$ रखने पर $a_5 = \frac{2(5)-3}{6} = \frac{10-3}{6} = \frac{7}{6}$

अत: प्रथम पाँच पद = $-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}$ व $\frac{7}{6}$ हैं। **उत्तर**

5. $a_n = (-1)^{n-1}\ 5^{n+1}$

हल— $\because a_n = (-1)^{n-1}\ 5^{n+1}$

प्रथम पद = $n = 1$ रखने पर $a_1 = (-1)^{1-1} . 5^{1+1} = 1 . 5^2 = 25$

द्वितीय पद = $n = 2$ रखने पर $a_2 = (-1)^{2-1} . 5^{2+1} = (-1)^1 . 5^3 = -125$

तृतीय पद = $n = 3$ रखने पर $a_3 = (-1)^{3-1} . 5^{3+1} = (-1)^2 . 5^4 = 625$

चतुर्थ पद = $n = 4$ रखने पर $a_4 = (-1)^{4-1} . 5^{4+1} = (-1)^3 . 5^5 = -3125$

पंचम पद = $n = 5$ रखने पर $a_5 = (-1)^{5-1} . 5^{5+1} = (-1)^4 . 5^6 = 15625$

अत: प्रथम पाँच पद = 25, −125, 625, −3125 व 15625 हैं। **उत्तर**

6. $a_n = n\frac{n^2+5}{4}$

हल— $\because a_n = n\left(\frac{n^2+5}{4}\right)$

प्रथम पद = $n = 1$ रखने पर $a_1 = 1 . \frac{1^2+5}{4} = 1 . \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

द्वितीय पद = $n = 2$ रखने पर $a_2 = \frac{2(2^2+5)}{4} = \frac{2\times 9}{4} = \frac{9}{2}$

तृतीय पद = $n = 3$ रखने पर $a_3 = \frac{3(3^2+5)}{4} = \frac{3\times 14}{4} = \frac{21}{2}$

चतुर्थ पद = $n = 4$ रखने पर $a_4 = \frac{4(4^2+5)}{4} = \frac{4\times 21}{4} = 21$

पंचम पद = $n = 5$ रखने पर $a_5 = \frac{5(5^2+5)}{4} = \frac{5\times 30}{4} = \frac{75}{2}$

अत: प्रथम पाँच पद = $\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{21}{2}$, 21 व $\frac{75}{2}$ हैं। **उत्तर**

निम्नलिखित प्रश्न 7 से 10 तक के अनुक्रमों में प्रत्येक का वांछित पद ज्ञात कीजिए, जिनका nवाँ पद दिया गया है—

7. $a_n = 4n - 3;\ a_{17}, a_{24}$

हल— $\because a_n = 4n - 3$

a_{17} के लिए $n = 17$ रखने पर $a_{17} = 4 . 17 - 3 = 68 - 3 = 65$

a_{24} के लिए $n = 24$ रखने पर $a_{24} = 4 . 24 - 3 = 96 - 3 = 93$

अत: $a_{17} = 65$ तथा $a_{24} = 93$ **उत्तर**

8. $a_n = \frac{n^2}{2^n};\ a_7$

हल— $\because a_n = \frac{n^2}{2^n};\ a_7$

a_7 के लिए $n = 7$ रखने पर $a_7 = \frac{7^2}{2^7} = \frac{49}{128}$

अत: $a_7 = \frac{49}{128}$ **उत्तर**

9. $a_n = (-1)^{n-1}\ n^3;\ a_9$

हल— $\because a_n = (-1)^{n-1}\ n^3$

a_9 के लिए $n = 9$ रखने पर

$a_9 = (-1)^{9-1} . (9)^3$

$a_9 = (-1)^8 . 9 \times 9 \times 9 = 729$

अत: $a_9 = 729$ **उत्तर**

10. $a_n = \frac{n\,(n-2)}{n+3};\ a_{20}$

हल— $\because a_n = \frac{n\,(n-2)}{n+3};\ a_{20}$

a_{20} के लिए $n = 20$ रखने पर $a_{20} = \frac{20\,(20-2)}{20+3} = \frac{20\times 18}{23} = \frac{360}{23}$

अत: $a_{20} = \frac{360}{23}$ **उत्तर**

प्रश्न 11 से 13 तक प्रत्येक अनुक्रम के पाँच पद लिखिए तथा संगत श्रेणी ज्ञात कीजिए—

11. $a_1 = 3, a_n = 3a_{n-1} + 2$ **सभी** $n > 1$ **के लिए**

हल— $\because$ $a_1 = 3,$

$a_n = 3a_{n-1} + 2\ \forall\ n > 1$

$n = 2$ के लिए $a_2 = 3a_{2-1} + 2 = 3a_1 + 2 = 3.3 + 2 = 9 + 2 = 11$

$n = 3$ के लिए $a_3 = 3a_{3-1} + 2 = 3a_2 + 2 = 3.11 + 2 = 33 + 2 = 35$

$n = 4$ के लिए $a_4 = 3a_{4-1} + 2 = 3a_3 + 2 = 3.35 + 2 = 105 + 2 = 107$

$n = 5$ के लिए $a_5 = 3a_{5-1} + 2 = 3a_4 + 2 = 3.107 + 2 = 321 + 2 = 323$

अत: पाँच पद = 3, 11, 35, 107, 323 हैं तथा

श्रेणी = 3 + 11 + 35 + 107 + 323 + ... **उत्तर**

12. $a_1 = -1, a_n = \frac{a_{n-1}}{n}$, **जहाँ** $n \geq 2$

हल— $\because$ $a_1 = -1$

तथा $a_n = \frac{a_{n-1}}{n}$, जहाँ $n \geq 2$

$n = 2$ के लिए $a_2 = \frac{a_{2-1}}{2} = \frac{a_1}{2} = \frac{-1}{2}$

$n = 3$ के लिए $a_3 = \frac{a_{3-1}}{3} = \frac{a_2}{3} = \frac{-1/2}{3} = -\frac{1}{6}$

$n = 4$ के लिए $a_4 = \frac{a_{4-1}}{4} = \frac{a_3}{4} = \frac{-1/6}{4} = -\frac{1}{24}$

$n = 5$ के लिए $a_5 = \frac{a_{5-1}}{5} = \frac{a_4}{5} = \frac{-1/24}{5} = -\frac{1}{120}$

अत: प्रथम पाँच पद $= -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{24}$ व $-\frac{1}{120}$ हैं तथा

$$\text{श्रेणी} = (-1) + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right) + \left(-\frac{1}{24}\right) + \left(-\frac{1}{120}\right) + \ldots.. \text{ उत्तर}$$

13. $a_1 = a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} - 1$, जहाँ $n > 2$

हल— $\because$ $a_1 = a_2 = 2$

तथा $a_n = a_{n-1} - 1$, जहाँ $n > 2$

$n = 3$ के लिए $a_3 = a_{3-1} - 1 = a_2 - 1 = 2 - 1 = 1$

$n = 4$ के लिए $a_4 = a_{4-1} - 1 = a_3 - 1 = 1 - 1 = 0$

$n = 5$ के लिए $a_5 = a_{5-1} - 1 = a_4 - 1 = 0 - 1 = -1$

अत: प्रथम पाँच पद 2, 2, 1, 0 व -1 हैं तथा श्रेणी $= 2 + 2 + 1 + 0 + (-1) + \ldots.$ उत्तर

14. Fibonacci अनुक्रम निम्नलिखित रूप में परिभाषित है— $1 = a_1 = a_2$ तथा $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n > 2$ तो $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ज्ञात कीजिए, जबकि $n = 1, 2, 3, 4, 5$

हल— $\because$ $a_1 = a_2 = 1$

तथा $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n > 2$

$n = 3$ के लिए $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$

$n = 4$ के लिए $a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$

$n = 5$ के लिए $a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$

$n = 6$ के लिए $a_6 = a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8$

अब $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ज्ञात करने के लिए

$n = 1$ के लिए $\frac{a_{1+1}}{a_1} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{1} = 1$

$n = 2$ के लिए $\frac{a_{2+1}}{a_2} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{1} = 2$

$n = 3$ के लिए $\frac{a_{3+1}}{a_3} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{3}{2}$

$n = 4$ के लिए $\frac{a_{4+1}}{a_4} = \frac{a_5}{a_4} = \frac{5}{3}$

$n = 5$ के लिए $\frac{a_{5+1}}{a_5} = \frac{a_6}{a_5} = \frac{8}{5}$

8.6 गुणोत्तर श्रेढी (Geometric Progression)

यदि किसी अशून्य संख्याओं की श्रेढी का प्रत्येक पद उससे पूर्व पद को, किसी निश्चित राशि से गुणा करने पर प्राप्त होता है, तो श्रेढी **गुणोत्तर श्रेढी** कहलाती है। अर्थात् श्रेढी के प्रत्येक पद का उससे पूर्व पद से अनुपात एक निश्चित राशि होती है, तो श्रेढी **गुणोत्तर श्रेढी** कहलाती है। इस निश्चित राशि को **सार्वअनुपात** (Common Ratio) कहते हैं।

उदाहरण (i) $1, 4, 4^2, 4^3, \ldots\ldots$ एक गुणोत्तर श्रेढी है जिसका सार्वअनुपात $= 4$ है।

(ii) $\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, -\frac{1}{81} \ldots\ldots$ एक गुणोत्तर श्रेढी है जिसका सार्वअनुपात $= -\frac{1}{3}$ है।

8.7 गुणोत्तर श्रेढी का व्यापक पद (General term of a Geometric Progression)

यदि किसी गुणोत्तर श्रेढी का प्रथम पद 'a' तथा सार्वअनुपात r है, तब

$a_1 = a$, $a_2 =$ प्रथम पद $\times$ सार्वअनुपात

$\Rightarrow$ $a_2 = ar$

$a_3 =$ द्वितीय पद $\times$ सार्वअनुपात

$= ar \times r = ar^2$

$a_4 =$ तृतीय पद $\times$ सार्वअनुपात

$= ar^2 \times r = ar^3$

अत: गुणोत्तर श्रेढी

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\Rightarrow$ $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

श्रेढी $a + ar + ar^2 + \ldots\ldots\ldots + ar^{n-1}$ अथवा $a + ar + ar^2 + \ldots\ldots\ldots + ar^{n-1} + \ldots\ldots\ldots$ क्रमशः परिमित या अपरिमित गुणोत्तर श्रेढी कहलाते हैं।

8.8 गुणोत्तर श्रेढी का nवाँ पद (n^{th} term of a Geometric Progression)

प्रथम पद $(a_1) = a = ar^{1-1}$

द्वितीय पद $(a_2) = ar = ar^{2-1}$

तृतीय पद $(a_3) = ar^2 = ar^{3-1}$

चतुर्थ पद $(a_4) = ar^3 = ar^{4-1}$