

नई राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 के तहत सत्र 2023-24 से पाठ्यपुस्तकों को पुनर्संयोजित किया गया है। यह संजीव बुक्स पूर्णतः नवीन पुनर्संयोजित पाठ्यपुस्तक पर आधारित है।

नं. 1

संजीव®

बुक्स

गणित-X

(कक्षा 10 के विद्यार्थियों के लिए)

माध्यमिक शिक्षा बोर्ड, राजस्थान के विद्यार्थियों के लिए
पूर्णतः नवीनतम पाठ्यक्रमानुसार

- माध्य. शिक्षा बोर्ड, 2024 का प्रश्न-पत्र
- पाठ्यपुस्तक के सभी अभ्यास प्रश्नों का हल
- सभी प्रकार के अन्य महत्वपूर्ण प्रश्नों का समावेश
- योग्य एवं अनुभवी लेखकों द्वारा लिखित

2025

संजीव प्रकाशन,
जयपुर

मूल्य : ₹ 280/-

प्रकाशक :

संजीव प्रकाशन

धामाणी मार्केट, चौड़ा रास्ता,

जयपुर-3

email : sanjeevprakashanjaipur@gmail.com

website : www.sanjivprakashan.com

© प्रकाशकाधीन

मूल्य : ₹ 280.00

लेजर टाइपसेटिंग :

संजीव प्रकाशन (D.T.P. Department), जयपुर

मुद्रक :

पंजाबी प्रेस, जयपुर

★ ★ ★ ★ ★

❖ इस पुस्तक में त्रुटियों को दूर करने के लिए हर संभव प्रयास किया गया है। किसी भी त्रुटि के पाये जाने पर अथवा किसी भी तरह के सुझाव के लिए आप हमें निम्न पते पर email या पत्र भेजकर सूचित कर सकते हैं—

email : sanjeevprakashanjaipur@gmail.com

पता : प्रकाशन विभाग

संजीव प्रकाशन

धामाणी मार्केट, चौड़ा रास्ता, जयपुर

आपके द्वारा भेजे गये सुझावों से अगला संस्करण और बेहतर हो सकेगा।

❖ इस पुस्तक में प्रकाशित किसी त्रुटि के प्रति तथा इससे होने वाली किसी भी क्षति के लिए लेखक, प्रकाशक, संपादक तथा मुद्रक किसी भी रूप में जिम्मेदार नहीं हैं। ध्यान रखें कि आप उक्त शर्तें मानते हुए ही यह पुस्तक खरीद रहे हैं।

❖ सभी प्रकार के विवादों का न्यायिक क्षेत्र 'जयपुर' होगा।

विषय-सूची

1. वास्तविक संख्याएँ	1 - 12
2. बहुपद	13 - 26
3. दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म	27 - 53
4. द्विघात समीकरण	54 - 72
5. समान्तर श्रेढ़ियाँ	73 - 110
6. त्रिभुज	111 - 135
7. निर्देशांक ज्यामिति	136 - 159
8. त्रिकोणमिति का परिचय	160 - 188
9. त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग	189 - 212
10. वृत्त	213 - 231
11. वृत्तों से सम्बन्धित क्षेत्रफल	232 - 246
12. पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन	247 - 267
13. सांख्यिकी	268 - 297
14. प्रायिकता	298 - 317
परिशिष्ट-1 गणितीय उपपत्तियाँ	318 - 325
परिशिष्ट-2 गणितीय निदर्शन	326 - 328

माध्यमिक परीक्षा, 2024**गणित
(MATHEMATICS)**

समय : 3 घण्टे 15 मिनट

पूर्णांक : 80

परीक्षार्थियों के लिए सामान्य निर्देश :

General Instructions to the Examinees :

1. परीक्षार्थी सर्वप्रथम अपने प्रश्न-पत्र पर नामांक अनिवार्यतः लिखें।
2. सभी प्रश्न करने अनिवार्य हैं।
3. प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दी गई उत्तर-पुस्तिका में ही लिखें।
4. जिन प्रश्नों में आन्तरिक खण्ड हैं, उन सभी के उत्तर एक साथ ही लिखें।
5. प्रश्न-पत्र के हिन्दी व अंग्रेजी रूपान्तर में किसी प्रकार की त्रुटि/अन्तर/विरोधाभास होने पर हिन्दी भाषा के प्रश्न को ही सही मानें।
6. प्रश्न का उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें।
7. प्रश्न क्रमांक 16 से 22 तक में आन्तरिक विकल्प हैं।
8. अपनी उत्तर-पुस्तिका के पृष्ठों के दोनों ओर लिखिए। यदि कोई रफ़ कार्य करना हो, तो उत्तर-पुस्तिका के अन्तिम पृष्ठों पर करें और इन्हें तिरछी लाइनों से काटकर उन पर 'रफ़ कार्य' लिख दें।

खण्ड-अ (SECTION-A)

बहुविकल्पीय प्रश्न : (Multiple Choice Questions) :

1. निम्न वस्तुनिष्ठ प्रश्नों के उत्तर का सही विकल्प चयन कर उत्तर-पुस्तिका में लिखिए।

- (i) दो संख्याओं का महत्तम समापवर्तक 27 है तथा उनका लघुत्तम समापवर्त्य 162 है। यदि एक संख्या 54 है, तो दूसरी संख्या है : 1
(अ) 81 (ब) 27 (स) 54 (द) 18
- (ii) बहुपद $x^2 - 2x - 8$ के शून्यक हैं : 1
(अ) 2, 4 (ब) 2, 5 (स) -2, 4 (द) -2, 6
- (iii) यदि पहली संख्या x का दुगुना दूसरी संख्या y के 7 गुने से 5 कम है, तो निम्न में से कौन सा समीकरण सही है? 1
(अ) $2x = 7y + 5$ (ब) $5x = 7y + 2$ (स) $7x = 2y - 5$ (द) $2x = 7y - 5$
- (iv) यदि समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद 2 और सार्व अन्तर 3 हो, तो n वाँ पद होगा— 1
(अ) $3n + 2$ (ब) $3n - 1$ (स) $2n - 1$ (द) $3n - 2$
- (v) 3 के प्रथम पाँच गुणजों का योगफल है— 1
(अ) 42 (ब) 39 (स) 45 (द) 33
- (vi) यदि किसी त्रिभुज PQR में $PO^2 + QR^2 = PR^2$ हो, तो कौन सा कोण समकोण होगा? 1
(अ) $\angle P$ (ब) $\angle Q$ (स) $\angle R$ (द) इनमें से कोई नहीं
- (vii) बिन्दु (0, 3) की x - अक्ष से दूरी होगी : 1
(अ) 3 (ब) 0 (स) 2 (द) 1
- (viii) $2 \sin 45^\circ \cos 45^\circ$ का मान है : 1
(अ) 2 (ब) 0 (स) $\frac{1}{2}$ (द) 1
- (ix) यदि किसी वृक्ष की छाया उसकी ऊँचाई की $\frac{1}{\sqrt{3}}$ गुना हो, तो सूर्य का उन्नयन कोण है : 1
(अ) 90° (ब) 60° (स) 45° (द) 30°

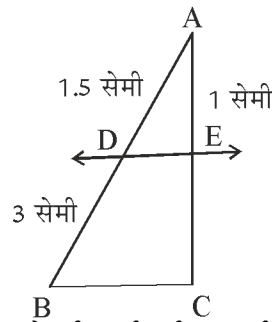
- (x) किसी वृत्त के व्यास के सिरों पर खींची गई स्पर्श-रेखाएँ परस्पर होती हैं : 1
 (अ) लम्ब (ब) समान्तर (स) प्रतिच्छेदी (द) छेदक
- (xi) यदि एक वृत्त की परिधि 176 सेमी है, तो उसकी त्रिज्या है :— 1
 (अ) 21 सेमी (ब) 14 सेमी (स) 28 सेमी (द) 7 सेमी
- (xii) यदि एक गोले का आयतन 36π घन सेमी है, तो उसकी त्रिज्या है : 1
 (अ) 3 सेमी (ब) 6 सेमी (स) 2 सेमी (द) 5 सेमी
- (xiii) प्रथम 11 पूर्ण संख्याओं का माध्य होगा : 1
 (अ) 4 (ब) 5 (स) 5.5 (द) 6
- (xiv) बंटन 3, 3, 5, 3, 4, 2, 8, 4, 3, 4, 3 का बहुलक है : 1
 (अ) 7 (ब) 3 (स) 4 (द) 5
- (xv) यदि $P(E) = 0.05$ है, तो 'E नहीं' की प्रायिकता होगी : 1
 (अ) 0.90 (ब) 0.59 (स) 0.50 (द) 0.95

2. निम्नलिखित प्रश्नों में रिक्त स्थानों की पूर्ति करते हुए उत्तरपुस्तिका में लिखिए।

- (i) समांतर श्रेणी-3, $\frac{-1}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ का 11वाँ पद है। 1
- (ii) $\cos^2 60^\circ - \sin^2 60^\circ$ का मान है। 1
- (iii) यदि एक वृत्त का क्षेत्रफल 154 सेमी² है, तो उसकी त्रिज्या है। 1
- (iv) यदि एक शंकु की त्रिज्या 6 सेमी व ऊँचाई 8 सेमी है, तो उसकी तिर्यक ऊँचाई है। 1
- (v) 3 माध्यक = 2 माध्य + । 1
- (vi) वर्ग अन्तराल $60 - 75$ का वर्ग चिह्न है। 1
- (vii) एक पासे को उछाले जाने पर 6 से बड़ा अंक आने की प्रायिकता होती है। 1

3. अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न :

- (i) यदि $x = 2^3 \times 3^2$ तथा $y = 2^2 \times 3^2$ हो, तो x और y का लघुत्तम समापवर्त्य (ल.स.प.) ज्ञात कीजिए। 1
- (ii) बहुपद $x^2 - 3$ के शून्यक ज्ञात कीजिए। 1
- (iii) रैखिक समीकरण युग्म $x + y = 14$ व $x - y = 4$ को हल कीजिए। 1
- (iv) निम्न आकृति में यदि $DE \parallel BC$ हो, तो EC का मान ज्ञात कीजिए। 1



- (v) बिन्दुओं $(-a, a)$ तथा $(-a, -a)$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए। 1
- (vi) एक ऊर्ध्वाधर खम्भे की परछाई खम्भे की ऊँचाई के बराबर है, तो सूर्य का उन्नयन कोण ज्ञात कीजिए। 1
- (vii) यदि एक मीनार के पाद बिन्दु से 100 मीटर की दूरी पर स्थित एक बिन्दु से उसके शिखर का उन्नयन कोण 60° है, तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। 1
- (viii) एक वृत्त की त्रिज्या 7 सेमी है तथा केन्द्र पर अंतरित कोण 60° है। चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए। 1
- (ix) एक घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 1014 वर्ग मीटर है। घन की भुजा ज्ञात कीजिए। 1

गणित कक्षा 10

3

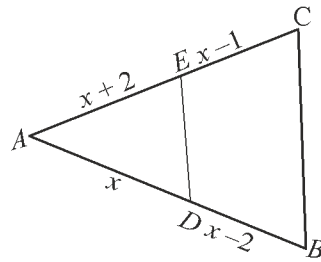
(x) 7 सेमी त्रिज्या के गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

1

खण्ड-ब (SECTION-B)

लघूत्तरात्मक प्रश्न

4. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। 2
5. बहुपद $2x^2 - x - 6$ के शून्यक ज्ञात कीजिए। 2
6. दो संख्याओं का अन्तर 26 है और एक संख्या दूसरी संख्या की तीन गुनी हो, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए। 2
7. निम्न आकृति में यदि $DE \parallel BC$, $AD = x$, $DB = x - 2$, $AE = x + 2$ तथा $EC = x - 1$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए। 2



8. यदि बिन्दु $(x, 3)$ और $(5, 7)$ के बीच की दूरी 5 इकाई हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए। 2
9. यदि $\tan A = 1$ हो, तो $2 \sin A \cos A$ का मान ज्ञात कीजिए। 2
10. दो खम्भों के शीर्ष, जिनकी ऊँचाई 20 मीटर तथा 14 मीटर हैं, एक तार से जुड़े हुये हैं। यदि तार क्षैतिज रेखा के साथ 30° का कोण बनाता है, तो तार की लम्बाई ज्ञात कीजिए। (तार सरल रेखीय रूप में जुड़ा हुआ है) 2
11. दो संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ 5 सेमी तथा 3 सेमी हैं। बड़े वृत्त की उस जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती हो। 2
12. त्रिज्या 21 सेमी वाले वृत्त का एक चाप केन्द्र पर 60° का कोण अंतरित करता है। चाप द्वारा बनाए गए त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 2
13. एक लम्ब वृत्तीय बेलन के आधार का क्षेत्रफल 154 सेमी^2 है तथा इसकी ऊँचाई 15 सेमी है, इसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 2
14. निम्न बारम्बारता बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए : 2

x	5	6	7	8	9	10
f	8	6	12	7	5	6

15. एक बच्चे के पास ऐसा पासा है जिसके छः फलकों पर निम्नलिखित अक्षर अंकित हैं : 2

A B C D E A

इस पासे को एक बार फेंका जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि (i) A प्राप्त हो (ii) D प्राप्त हो?

खण्ड-स (SECTION-C)

दीर्घ-उत्तरीय प्रश्न :

16. 10 और 250 के बीच में 4 के कितने गुणज हैं? 3

अथवा/OR

- 0 और 50 के बीच की विषम संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए। 3
17. यदि बिन्दु $A(6, 1)$, $B(8, 2)$, $C(9, 4)$ और $D(p, 3)$ एक समांतर-चतुर्भुज के शीर्ष इसी क्रम में हों, तो p का मान ज्ञात कीजिए। 3

अथवा/OR

उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $(-1, 7)$ और $(4, -3)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 2 : 3 के अनुपात में विभाजित करता है। 3

18. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के परिगत समांतर-चतुर्भुज समचतुर्भुज होता है। 3

अथवा/OR

सिद्ध कीजिए कि वृत्त के परिगत बने चतुर्भुज की आमने-सामने की भुजाएँ वृत्त के केन्द्र पर संपूरक कोण अंतरित करती हैं। 3

19. निम्न बारम्बारता बंटन का माध्यक ज्ञात कीजिए : 3

वर्ग	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बारम्बारता	4	28	42	20	6

अथवा/OR

यदि निम्न बारम्बारता बंटन का माध्य 21.5 हो, तो k का मान ज्ञात कीजिए। 3

x	5	15	25	35	45
f	6	4	3	k	2

खण्ड-द (SECTION-D)**निबन्धात्मक प्रश्न :**

20. एक समकोण त्रिभुज की ऊँचाई इसके आधार से 7 सेमी कम है। यदि कर्ण 13 सेमी. का हो, तो अन्य दो भुजाएँ ज्ञात कीजिए। 4

अथवा/OR

दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांक ज्ञात कीजिए जिनके वर्गों का योग 365 हो। 4

21. सिद्ध कीजिए कि $(\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)^2 = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$. 4

अथवा/OR

सिद्ध कीजिए कि $(\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A) \tan A + \cot A = 1$. 4

22. निम्न बंटन का 17.5 कल्पित माध्य मानकर माध्य ज्ञात कीजिए : 4

वर्ग	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30
बारम्बारता	3	7	15	24	16	5

अथवा/OR

निम्न बारम्बारता बंटन का बहुलक ज्ञात कीजिए : 4

वर्ग	1 - 3	3 - 5	5 - 7	7 - 9	9 - 11
बारम्बारता	7	8	2	2	1

गणित-कक्षा 10

अध्याय-1

वास्तविक संख्याएँ

मुख्य बिन्दु

1. **अंकगणित की आधारभूत प्रमेय**—प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओं के एक गुणनफल के रूप में व्यक्त (गुणनखंडित) किया जा सकता है तथा यह गुणनखण्डन अद्वितीय होता है। इस पर कोई ध्यान दिये बिना कि अभाज्य गुणनखण्ड किस क्रम में आ रहे हैं?

2. अंकगणित की आधारभूत प्रमेय का प्रयोग हम दो अनुप्रयोग में करेंगे—

(i) प्रथम अनुप्रयोग में कुछ संख्याओं जैसे— $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ और $\sqrt{5}$ आदि को अपरिमेयता सिद्ध करने में करेंगे।

(ii) किसी दी गई संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात करने में करेंगे।

3. **महत्तम समापवर्तक**—किन्हीं दी हुई संख्याओं के सबसे बड़े समापवर्तक (Common factor) को उन संख्याओं का म.स. कहते हैं।

∴ HCF = संख्याओं में प्रत्येक उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्ड की सबसे छोटी घात का गुणनफल।

4. **लघुत्तम समापवर्त्य**—दी गई संख्याओं का सबसे छोटा उभयनिष्ठ गुणज ही उनका ल.स. होता है।

∴ LCM = संख्याओं में सम्बद्ध प्रत्येक अभाज्य गुणनखण्ड की सबसे बड़ी घात का गुणनफल।

5. **दो संख्याओं के म.स. तथा ल.स. में संबंध**—दो संख्याओं के म.स. तथा ल.स. का गुणनफल उन संख्याओं के गुणनफल के बराबर होता है।

अर्थात् म.स. (H.C.F.) × ल.स. (L.C.M.)
= प्रथम संख्या (a) × द्वितीय संख्या (b)

या $\boxed{\text{H.C.F.} \times \text{L.C.M.} = a \times b}$

6. इस मुख्य सम्बन्ध की सहायता से निर्मांकित सम्बन्ध भी लिखे जा सकते हैं—

$$(i) \text{H.C.F.} = \frac{a \times b}{\text{L.C.M.}}$$

$$(ii) \text{L.C.M.} = \frac{a \times b}{\text{H.C.F.}}$$

$$(iii) a = \frac{\text{H.C.F.} \times \text{L.C.M.}}{b}$$

$$(iv) b = \frac{\text{H.C.F.} \times \text{L.C.M.}}{a}$$

7. किसी परिमेय संख्या, माना कि $\frac{p}{q}$ ($q \neq 0$) का दशमलव प्रसार कब सांत होता है तथा कब असांत आवर्ती होता है। ऐसा हम $\frac{p}{q}$ का हर q के अभाज्य गुणनखण्ड देखकर ज्ञात करते हैं।

8. एक संख्या 'S' अपरिमेय संख्या कहलाती है, यदि उसे $\frac{p}{q}$ के रूप में नहीं लिखा जा सकता है, जहाँ p

और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है। जैसे— $\sqrt{2}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{15}\pi$, $\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, 0.10110111011110 इत्यादि।

9. यदि p कोई अभाज्य संख्या है और p, a^2 को विभाजित करता है तो p, a को भी विभाजित करेगा, जहाँ a एक धनात्मक पूर्णांक है।

अपरिमेय संख्याएँ—ऐसी संख्याएँ जिनके दशमलव प्रसार असांत अनावर्ती होते हैं, अपरिमेय संख्याएँ कहलाती हैं।
 उदाहरण— $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \pi$ आदि।
 10. एक परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का योग या अन्तर एक अपरिमेय संख्या होती है।
 11. एक शून्येतर परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का गुणनफल या भागफल एक अपरिमेय संख्या होती है।

पाठ्यपुस्तक के प्रश्न

प्रश्नावली 1.1

1. निम्नलिखित संख्याओं को अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए—

(i) 140 (ii) 156 (iii) 3825

(iv) 5005 (v) 7429

हल— (i) 140 के अभाज्य गुणनखण्ड

$$= 2 \times 70$$

$$= 2 \times 2 \times 35$$

$$= 2 \times 2 \times 5 \times 7$$

$$= 2^2 \times 5 \times 7 \text{ उत्तर}$$

(ii) 156 के अभाज्य गुणनखण्ड

$$= 2 \times 78$$

$$= 2 \times 2 \times 39$$

$$= 2 \times 2 \times 3 \times 13$$

$$= 2^2 \times 3 \times 13 \text{ उत्तर}$$

(iii) 3825 के अभाज्य गुणनखण्ड

$$= 3 \times 1275$$

$$= 3 \times 3 \times 425$$

$$= 3 \times 3 \times 5 \times 85$$

$$= 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 17$$

$$= 3^2 \times 5^2 \times 17 \text{ उत्तर}$$

(iv) 5005 के अभाज्य गुणनखण्ड

$$= 5 \times 1001$$

$$= 5 \times 7 \times 143$$

$$= 5 \times 7 \times 11 \times 13 \text{ उत्तर}$$

(v) 7429 के अभाज्य गुणनखण्ड

$$= 17 \times 437$$

$$= 17 \times 19 \times 23 \text{ उत्तर}$$

2. पूर्णाकों के निम्नलिखित युग्मों के HCF और LCM ज्ञात कीजिए तथा इसकी जाँच कीजिए कि दो संख्याओं का गुणनफल = HCF \times LCM है।

(i) 26 और 91 (ii) 510 और 92

(iii) 336 और 54

हल— (i) 26 और 91

$$26 \text{ के अभाज्य गुणनखण्ड} = 2 \times 13$$

$$91 \text{ के अभाज्य गुणनखण्ड} = 7 \times 13$$

$$\therefore 26 \text{ और } 91 \text{ का LCM} = 2 \times 7 \times 13 = 182$$

$$\text{तथा } 26 \text{ और } 91 \text{ का HCF} = 13$$

$$\text{सत्यापन—HCF} (26, 91) \times \text{LCM} (26, 91)$$

$$= 13 \times 182$$

$$= 13 \times 2 \times 91$$

$$= 26 \times 91$$

$$= \text{दी गई संख्याओं का गुणनफल}$$

(ii) 510 और 92

$$510 \text{ के अभाज्य गुणनखण्ड}$$

$$= 2 \times 255$$

$$= 2 \times 3 \times 85$$

$$= 2 \times 3 \times 5 \times 17$$

$$\text{तथा } 92 \text{ के अभाज्य गुणनखण्ड}$$

$$= 2 \times 46$$

$$= 2 \times 2 \times 23$$

$$= 2^2 \times 23$$

$$\text{LCM} (510, 92) = 2^2 \times 3 \times 5 \times 17 \times 23$$

$$= 23460$$

$$\text{तथा HCF} (510, 92) = 2$$

$$\text{सत्यापन—HCF} (510, 92) \times \text{LCM} (510, 92)$$

$$= 2 \times 23460$$

$$= 2 \times 2^2 \times 3 \times 5 \times 17 \times 23$$

$$= 2 \times 3 \times 5 \times 17 \times 2^2 \times 23$$

$$= 510 \times 92$$

$$= \text{दी गई संख्याओं का गुणनफल}$$

(iii) 336 और 54

$$336 \text{ के अभाज्य गुणनखण्ड} = 2 \times 168$$

$$= 2 \times 2 \times 84$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 42$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 21$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7$$

$$= 2^4 \times 3 \times 7$$

$$54 \text{ के अभाज्य गुणनखण्ड} = 2 \times 27$$

$$= 2 \times 3 \times 9$$

$$= 2 \times 3 \times 3 \times 3$$

$$= 2 \times 3^3$$

$$\therefore \text{HCF} (336, 54) = 2 \times 3 = 6$$

$$\text{LCM} = 2^4 \times 3^3 \times 7$$

$$= 3024$$

$$\text{सत्यापन-HCF} (336, 54) \times \text{LCM} (336, 54)$$

$$= 6 \times 3024$$

$$= 2 \times 3 \times 2^4 \times 3^3 \times 7$$

$$= 2^4 \times 3 \times 7 \times 2 \times 3^3$$

$$= 336 \times 54$$

$$= \text{दी गई संख्याओं का गुणनफल}$$

3. अभाज्य गुणनखण्डन विधि द्वारा निम्नलिखित पूर्णाकों के HCF और LCM ज्ञात कीजिए—

(i) 12, 15 और 21 (ii) 17, 23 और 29

(iii) 8, 9 और 25

हल— (i) 12, 15 और 21

$$12 \text{ के अभाज्य गुणनखण्ड} = 2 \times 2 \times 3$$

$$= 2^2 \times 3$$

$$15 \text{ के अभाज्य गुणनखण्ड} = 3 \times 5$$

$$21 \text{ के अभाज्य गुणनखण्ड} = 3 \times 7$$

$$\therefore \text{LCM} (12, 15 \text{ और } 21)$$

$$= 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420 \text{ उत्तर}$$

$$\text{तथा HCF} (12, 15 \text{ और } 21) = 3 \text{ उत्तर}$$

(ii) 17, 23 और 29

$$17 \text{ के अभाज्य गुणनखण्ड} = 1 \times 17$$

$$23 \text{ के अभाज्य गुणनखण्ड} = 1 \times 23$$

$$29 \text{ के अभाज्य गुणनखण्ड} = 1 \times 29$$

$$\therefore \text{LCM} (17, 23 \text{ और } 29)$$

$$= 17 \times 23 \times 29$$

$$= 11339 \text{ उत्तर}$$

$$\text{तथा HCF} (17, 23 \text{ और } 29) = 1 \text{ उत्तर}$$

(iii) 8, 9 और 25

$$8 \text{ के अभाज्य गुणनखण्ड}$$

$$= 2 \times 2 \times 2 = (2)^3 \times 1$$

$$9 \text{ के अभाज्य गुणनखण्ड}$$

$$= 3 \times 3 = (3)^2 \times 1$$

$$25 \text{ के अभाज्य गुणनखण्ड}$$

$$= 5 \times 5 = (5)^2 \times 1$$

$$\therefore \text{LCM} (8, 9 \text{ और } 25) = (2)^3 \times (3)^2 \times (5)^2$$

$$= 8 \times 9 \times 25$$

$$= 1800 \text{ उत्तर}$$

$$\text{तथा HCF} (8, 9 \text{ और } 25) = 1 \text{ उत्तर}$$

4. HCF (306, 657) = 9 दिया है। LCM (306, 657) ज्ञात कीजिए।

हल— प्रश्नानुसार संख्याएँ 306 व 657 हैं।

$\therefore a = 306, b = 657$ और H.C.F. = 9 दिया है।

हम जानते हैं कि

$$\text{L.C.M.} = \frac{a \times b}{\text{H.C.F.}}$$

$$= \frac{306 \times 657}{9}$$

$$= 34 \times 657 = 22338$$

अतः L.C.M. (306, 657) = 22338 उत्तर

5. जाँच कीजिए कि क्या किसी प्राकृत संख्या n के लिए, संख्या 6^n अंक 0 पर समाप्त हो सकती है।

हल—माना कि किसी प्राकृत संख्या n के लिए, $n \in \mathbb{N}$, 6^n अंक 0 पर समाप्त होती है अतः 6^n , 5 से विभाज्य होगी।

परन्तु 6 के अभाज्य गुणनखण्ड $6 = 2 \times 3$

$\therefore (6)^n$ के अभाज्य गुणनखण्ड $(6)^n = (2 \times 3)^n$ होंगे।

अर्थात् यह स्पष्ट हो रहा है कि 6^n के अभाज्य गुणनखण्डों में 5 का कोई स्थान नहीं है।

$\therefore 6^n$ का कोई गुणनखण्ड 5 नहीं हो सकता है अर्थात् संख्या 6^n अंक शून्य पर समाप्त नहीं हो सकती है।

6. व्याख्या कीजिए कि $7 \times 11 \times 13 + 13$ और $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ भाज्य संख्याएँ क्यों हैं?

हल—प्रश्नानुसार $7 \times 11 \times 13 + 13$

$$= 13 (7 \times 11 + 1)$$

चूँकि इस प्राप्त संख्या का एक गुणनखण्ड 13 है अतः यह एक भाज्य संख्या है। पुनः प्रश्नानुसार

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$$

$$= 5 (7 \times 6 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 1)$$

यह प्राप्त संख्या भी एक भाज्य संख्या है क्योंकि इसका भी एक गुणनखण्ड 5 है। अतः दी गई दोनों संख्याएँ भाज्य संख्याएँ हैं।

7. किसी खेल के मैदान के चारों ओर एक वृत्ताकार पथ है। इस मैदान का एक चक्कर लगाने में सोनिया को 18 मिनट लगते हैं, जबकि इसी मैदान का एक चक्कर लगाने में रवि को 12 मिनट लगते हैं। मान लीजिए वे दोनों एक ही स्थान और एक ही समय पर चलना प्रारम्भ करके एक ही दिशा में चलते हैं। कितने समय बाद वे पुनः प्रारम्भिक स्थान पर मिलेंगे?

हल—सोनिया द्वारा वृत्ताकार मैदान का 1 चक्कर लगाने का समय = 18 मिनट

रवि द्वारा उसी मैदान का एक चक्कर लगाने में लगा समय = 12 मिनट

यह ज्ञात करने के लिए कि वे पुनः दोनों कितने समय के बाद प्रारम्भिक बिन्दु पर मिलेंगे, हमें 18 व 12 का LCM ज्ञात करना होगा।

$$\begin{aligned} \text{अतः 18 के अभाज्य गुणखण्डन} &= 2 \times 9 \\ &= 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{तथा 12 के अभाज्य गुणखण्डन} &= 2 \times 6 \\ &= 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3 \end{aligned}$$

18 और 12 के सभी अधिकतम घातांक में अभाज्य गुणखण्डों का गुणनफल लेने पर

$$\begin{aligned} \therefore \text{LCM (18, 12)} &= 2^2 \times 3^2 \\ &= 4 \times 9 = 36 \end{aligned}$$

अर्थात् सोनिया एवं रवि प्रारम्भिक स्थान पर 36 मिनट बाद मिलेंगे। उत्तर

प्रश्नावली 1.2

1. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल—माना कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। अतः हम ऐसे दो पूर्णांक r व s प्राप्त कर सकते हैं जहाँ $s \neq 0$

$$\sqrt{5} = \frac{r}{s}$$

अब पुनः माना कि r व s में, 1 के अतिरिक्त अन्य कुछ गुणखण्ड हैं तो हम उस उभयनिष्ठ गुणखण्ड से r और s को विभाजित करके $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ प्राप्त कर सकते हैं। यहाँ a और b सहअभाज्य है।

$$\text{अर्थात् } b\sqrt{5} = a$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$\Rightarrow (b\sqrt{5})^2 = a^2$$

$$\Rightarrow b^2(\sqrt{5})^2 = a^2$$

$$\Rightarrow 5b^2 = a^2 \quad \dots (i)$$

अतः 5, a^2 को विभाजित करता है।

प्रमेय के अनुसार यदि एक अभाज्य संख्या p , a^2 को विभाजित करती है तो p , a को भी विभाजित करेगी, जहाँ a एक धनात्मक पूर्णांक है।

$$\Rightarrow 5, a \text{ को भी विभाजित करता है।} \quad \dots (ii)$$

अतः $a = 5c$ जहाँ c कोई पूर्णांक है।

a का मान (i) में रखने पर

$$5b^2 = (5c)^2$$

$$5b^2 = 25c^2$$

$$b^2 = 5c^2$$

$$\text{या } 5c^2 = b^2$$

$\Rightarrow 5, b^2$ को विभाजित करता है।

प्रमेय के अनुसार 5, b को भी विभाजित करता है।

.... (iii)

(ii) व (iii) से, a और b का कम से कम एक उभयनिष्ठ गुणखण्ड 5 है। परन्तु यह इस तथ्य का विरोधाभासी है कि a और b अविभाज्य हैं या इनके 1 के अतिरिक्त अन्य कोई उभयनिष्ठ गुणखण्ड हैं। अतः हमारी कल्पना कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है, असत्य है। अर्थात् $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। (इतिसिद्धम्)

2. सिद्ध कीजिए कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल— माना कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। अतः हम अविभाज्य संख्या a और b प्राप्त कर सकते हैं जहाँ a और b पूर्णांक हैं कि $b \neq 0$ तथा

$$3 + 2\sqrt{5} = \frac{a}{b}$$

$$\text{या } \frac{a}{b} - 3 = 2\sqrt{5}$$

$$\text{या } \sqrt{5} = \frac{a}{2b} - \frac{3}{2}$$

$$\text{या } \sqrt{5} = \frac{a-3b}{2b}$$

$\therefore a$ और b पूर्णांक हैं

$$\therefore \frac{a-3b}{2b} \text{ एक परिमेय संख्या है।}$$

अर्थात् $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। परन्तु यह तथ्य इस कथन का खण्डन करता है कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। अर्थात् यह कल्पना असत्य है। अतः दी गई संख्या $3 + 2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। (इतिसिद्धम्)

3. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित संख्याएँ अपरिमेय हैं—

$$(i) \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (ii) 7\sqrt{5} \quad (iii) 6 + \sqrt{2}$$

$$\text{हल— (i) } \frac{1}{\sqrt{2}}$$

प्रश्न में दिए गए कथन के विपरीत माना कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक परिमेय संख्या है। अतः हम अविभाज्य पूर्णांक a और b ($b \neq 0$) प्राप्त कर सकते हैं अर्थात्

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$