

NCERT के पूर्णतया संशोधित नवीनतम् पाठ्यक्रम पर आधारित

# संजीव<sup>®</sup> गणित

## कक्षा-12 (भाग-1)

माध्यमिक शिक्षा बोर्ड, राजस्थान के विद्यार्थियों के लिए

लेखक :

एस. सी. गुप्ता

एम.एससी., एम.एड.

वरिष्ठ व्याख्याता गणित

राजकीय आदर्श उच्च माध्यमिक विद्यालय

सुजानपुरा, बस्सी (जयपुर)

डॉ. आर. वाधवानी

एम.एससी., एम.फिल., पीएच.डी.

2024

संजीव प्रकाशन

जयपुर-3

मूल्य :

₹ 440/-

- प्रकाशक :

### संजीव प्रकाशन

धामाणी मार्केट, चौड़ा रास्ता,

जयपुर-3

email : sanjeevprakashanjaipur@gmail.com

website : www.sanjivprakashan.com

- © प्रकाशकाधीन

- मूल्य : ₹ 440.00

- लेजर कम्पोजिंग :

संजीव प्रकाशन (D.T.P. Department), जयपुर

- मुद्रक :

मनोहर आर्ट प्रिन्टर्स, जयपुर

\*\*\*\*\*

- ❖ इस पुस्तक में त्रुटियों को दूर करने के लिए हर संभव प्रयास किया गया है। किसी भी त्रुटि के पाये जाने पर अथवा किसी भी तरह के सुझाव के लिए आप हमें निम्न पते पर email या पत्र भेजकर सूचित कर सकते हैं—  
email : sanjeevprakashanjaipur@gmail.com  
पता : प्रकाशन विभाग संजीव प्रकाशन  
धामाणी मार्केट, चौड़ा रास्ता, जयपुर  
आपके द्वारा भेजे गये सुझावों से अगला संस्करण और बेहतर हो सकेगा।
- ❖ इस पुस्तक में प्रकाशित किसी त्रुटि के प्रति तथा इससे होने वाली किसी भी क्षति के लिए लेखक, प्रकाशक, संपादक तथा मुद्रक किसी भी रूप में जिम्मेदार नहीं हैं।
- ❖ सभी प्रकार के विवादों का न्यायिक क्षेत्र 'जयपुर' होगा।

## प्रस्तावना

ज्ञान एवं विज्ञान में तीव्र गति से हो रही वृद्धि को ध्यान में रखते हुए प्रस्तुत पुस्तक 'गणित भाग-1' का यह संस्करण राजस्थान बोर्ड द्वारा स्वीकृत **कक्षा-12 के नवीनतम संशोधित N.C.E.R.T. पाठ्यक्रमानुसार** लिखा गया है। प्रस्तुत सन्दर्भ पुस्तक इस कक्षा में आने वाले विज्ञान, वाणिज्य एवं कला वर्ग के विद्यार्थियों के स्तर को ध्यान में रखकर लिखी गयी है। पुस्तक में विगत वर्षों में विभिन्न प्रतियोगी परीक्षाओं में पूछे गये प्रश्न हल सहित दिये गये हैं।

पुस्तक का निर्माण करते समय इस बात का विशेष ध्यान रखा गया है कि पुस्तक की विषय-सामग्री एवं सिद्धान्तों को सरल भाषा में प्रस्तुत कर छात्रों की विषय के प्रति रुचि पैदा हो। N.C.E.R.T. के सभी प्रश्नों का हल पुस्तक में समायोजित है।

प्रस्तुत संस्करण की निम्न विशेषताएँ हैं—

1. विषय-वस्तु की भाषा-शैली को सरल-सहज व पूर्ण रूप से राजस्थान राज्य के अनुरूप रखा गया है जिससे कि विद्यार्थी ज्ञान को आसानी से समाहित कर सकें।
2. विभिन्न गणितीय सूत्रों का समावेश।
3. महत्वपूर्ण तथ्यों का समावेश।
4. पुस्तक में आवश्यकतानुसार हल सहित उदाहरण, प्रत्येक विषय-वस्तु के साथ दिये गये हैं, जिससे विद्यार्थी गणित विषय के सिद्धान्तों के अनुप्रयोगों को आसानी से समझ सकें।
5. NCERT के सभी प्रश्नों का हल पुस्तक के प्रत्येक अध्याय में समायोजित है।
6. प्रत्येक अध्याय के अन्त में **महत्वपूर्ण प्रश्न (वस्तुनिष्ठ, रिक्त स्थान, अतिलघूत्तरात्मक, लघूत्तरात्मक एवं निबन्धात्मक)** हल सहित दिये गये हैं, जिससे विद्यार्थी में आत्मविश्वास उत्पन्न हो।
7. प्रत्येक अध्याय के अन्त में **विभिन्न प्रतियोगी परीक्षाओं में पूछे गये बहुविकल्पीय प्रश्नों को भी हल सहित दिया गया है।**

हमारे द्वारा भरसक प्रयास किया गया है कि यह पुस्तक विद्यार्थियों, अध्यापकों की आवश्यकताओं की पूर्ति करेगी तथा उनके लिए लाभदायक सिद्ध होगी।

आशा है कि यह पुस्तक C.B.S.E. के हिन्दी माध्यम के विद्यार्थियों के लिये भी मददगार सिद्ध होगी।

पुस्तक का नवीनतम संशोधित संस्करण नये कलेवर में प्रस्तुत किया जा रहा है। इसमें विषय विशेषज्ञों, शिक्षकों तथा पाठकों से प्राप्त बहुमूल्य सुझावों को भी उचित स्थान दिया गया है।

हम उन सभी विद्वानों, लेखकों के आभारी हैं जिनसे हमें निरन्तर प्रेरणा एवं मार्गदर्शन प्राप्त होते रहे हैं।

इस पुस्तक के प्रकाशन हेतु हम संजीव प्रकाशन के भी अत्यन्त आभारी हैं जिनके अथक तथा सतत प्रयासों से इस पुस्तक का प्रकाशन हो पाया है।

लेखक अपने परिश्रमपूर्ण प्रयास को तभी सफल मानेंगे जब यह पुस्तक सम्बन्धित छात्रों के लिए अधिक से अधिक लाभदायक सिद्ध होगी। प्रस्तुत पुस्तक को और अधिक उपयोगी बनाने हेतु शिक्षकों एवं पाठकगण के बहुमूल्य सुझावों का सहर्ष स्वागत किया जायेगा। अतः हम उनके आभारी रहेंगे।

लेखक

एस.सी. गुप्ता

डॉ. आर. वाधवानी

## विषय-सूची

1. सम्बन्ध एवं फलन (Relation and Function)	1-39
2. प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन (Inverse Trigonometric Functions)	40-71
3. आव्यूह (Matrices)	72-122
4. सारणिक (Determinants)	123-173
5. सांतत्य तथा अवकलनीयता (Continuity and Differentiability)	174-266
6. अवकलज के अनुप्रयोग (Applications of Derivative)	267-325

**उच्च माध्यमिक परीक्षा, 2023**  
**गणित (Mathematics)**

समय : 3 घण्टे 15 मिनट

पूर्णांक : 80

परीक्षार्थियों के लिए सामान्य निर्देश :

1. परीक्षार्थी सर्वप्रथम अपने प्रश्न-पत्र पर नामांक अनिवार्यतः लिखें।
2. सभी प्रश्न करने अनिवार्य हैं।
3. प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दी गई उत्तर-पुस्तिका में ही लिखें।
4. जिन प्रश्नों में आन्तरिक खण्ड हैं, उन सभी के उत्तर एक साथ ही लिखें।
5. प्रश्न-पत्र के हिन्दी व अंग्रेजी रूपान्तर में किसी प्रकार की त्रुटि/अन्तर/विरोधाभास होने पर हिन्दी भाषा के प्रश्न को ही सही मानें।
6. प्रश्न का उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें।
7. प्रश्न संख्या 17 से 23 में आन्तरिक विकल्प दिये गए हैं।
8. प्रश्न संख्या 23 ग्राफ पेपर पर हल करना है।

**खण्ड-अ (Section-A)**

1. बहुविकल्पीय प्रश्न :

**Multiple Choice Questions :**

- (i) यदि  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \sin x$  तथा  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = x^2$  तब  $(f \circ g)(x)$  बराबर है। [1]

If  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \sin x$  and  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = x^2$  then  $(f \circ g)(x)$  is equal to :

- (A)  $\sin x^2$  (B)  $\sin x$  (C)  $\sin^2 x^2$  (D)  $\sin^2 x$

- (ii) यदि किसी आव्यूह की कोटि  $m \times n$  हैं, तो इसमें अवयवों की संख्या हैं- [1]

If the order of a matrix is  $m \times n$ , then the number of elements in it are-

- (A)  $m$  (B)  $n$  (C)  $mn$  (D)  $m-n$

- (iii) यदि  $y = x \cdot \log_e x$ , तो  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  का मान होगा- [1]

If  $y = x \cdot \log_e x$ , then the value of  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  will be-

- (A)  $\frac{1}{1+x}$  (B)  $\frac{1}{x}$  (C)  $\log_e(1+x)$  (D)  $1 + \log_e x$

- (iv)  $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$  का  $x$  के सापेक्ष प्रति अवकलज है- [1]

The anti derivative of  $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$  with respect to  $x$ -

- (A)  $\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$  (B)  $\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}x^2 + C$   
(C)  $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$  (D)  $\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + C$

- (v)  $\int \cos^2 x dx$  का मान है- [1]

The value of  $\int \cos^2 x dx$  is-

- (A)  $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C$  (B)  $x^2 + \frac{1}{4} \sin 2x + C$   
 (C)  $\frac{x}{4} + \frac{1}{2} \sin x + C$  (D)  $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \sin^2 x + C$

(vi) वक्र  $y = x^2$  एवं रेखा  $y = 4$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है- [1]

The area of the region bounded by the curve  $y = x^2$  and the line  $y = 4$  is-

- (A)  $\frac{33}{2}$  (B)  $\frac{8}{3}$  (C)  $\frac{32}{3}$  (D)  $\frac{4}{3}$

(vii)  $\hat{i} \cdot (\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j} \cdot (\hat{i} \times \hat{k}) + \hat{k} \cdot (\hat{i} \times \hat{j})$  का मान है- [1]

The value of  $\hat{i} \cdot (\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j} \cdot (\hat{i} \times \hat{k}) + \hat{k} \cdot (\hat{i} \times \hat{j})$  is-

- (A) 0 (B) -1 (C) 1 (D) 3

(viii) यदि दो सदिशों  $\vec{a}$  तथा  $\vec{b}$  के परिमाण क्रमशः  $\sqrt{3}$  व 2 हैं और  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{6}$  हो, तो  $\vec{a}$  तथा  $\vec{b}$  के बीच का कोण है- [1]

If the magnitude of two vectors  $\vec{a}$  and  $\vec{b}$  are  $\sqrt{3}$  and 2 respectively and  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{6}$ , then the angle between  $\vec{a}$  and  $\vec{b}$  is-

- (A)  $\frac{\pi}{2}$  (B)  $\frac{\pi}{3}$  (C)  $\frac{\pi}{6}$  (D)  $\frac{\pi}{4}$

(ix)  $x$ ,  $y$  और  $z$ -अक्षों पर क्रमशः 2, 3 और 4 अंतः खंड काटने वाले समतल का समीकरण है- [1]

The equation of the plane with intercepts of 2, 3 and 4 on the  $x$ ,  $y$  and  $z$ -axes respectively is-

- (A)  $4x + 6y + 3z = 12$  (B)  $6x + 4y + 3z = 12$   
 (C)  $3x + 4y + 6z = 12$  (D)  $5x + 4y + 3z = 0$

(x) यदि  $P(A) = \frac{7}{13}$ ,  $P(B) = \frac{9}{13}$  और  $P(A \cap B) = \frac{4}{13}$  हो, तो  $P\left(\frac{A}{B}\right)$  का मान है- [1]

If  $P(A) = \frac{7}{13}$ ,  $P(B) = \frac{9}{13}$  and  $P(A \cap B) = \frac{4}{13}$ , then the value of  $P\left(\frac{A}{B}\right)$  is-

- (A)  $\frac{4}{9}$  (B)  $\frac{7}{9}$  (C)  $\frac{5}{9}$  (D)  $\frac{5}{13}$

(xi) यदि पासों का एक जोड़ा उछाला जाता है, तो प्रत्येक पासे पर सम अभाज्य संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता है- [1]

If a pair of dice is thrown, then the probability of getting an even prime number on each die is-

- (A) 0 (B)  $\frac{1}{3}$  (C)  $\frac{1}{12}$  (D)  $\frac{1}{36}$

(xii) यदि एक सिक्के को तीन बार उछाला गया है, जहाँ E: तीसरी उछाल पर चित, F: पहली दोनों उछालों पर चित हो, तो  $P(E/F)$  का मान है- [1]

If a coin is tossed three times, where E: head on third toss; F: heads on first two tosses, then the value of  $P(E/F)$  is-

- (A)  $\frac{1}{8}$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C)  $\frac{1}{4}$  (D)  $\frac{1}{3}$

2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

Fill in the blanks :

(i) यदि  $x \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$  हो, तो  $(x + y) = \dots\dots\dots$  होगा। [1]

If  $x \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$ , then  $(x+y) = \dots\dots\dots$  .

(ii)  $\cos(\sqrt{x})$  का  $x$  के सापेक्ष अवकलन ..... है। [1]

The derivative of  $\cos(\sqrt{x})$  with respect to  $x$  is ..... .

(iii) वक्र  $y = 3x^4 - 4x$  के  $x = 4$  पर स्पर्श रेखा की प्रवणता का मान ..... होगा। [1]

The slope of the tangent line at  $x = 4$  to the curve  $y = 3x^4 - 4x$  will be ..... .

(iv)  $\int x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$  का मान ..... होगा। [1]

The value of  $\int x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$  will be ..... .

(v) यदि बिन्दुओं A, B, C और D के निर्देशांक क्रमशः (1, 2, 3), (4, 5, 7), (-4, 3, -6) और (2, 9, 2) हैं, तो AB और CD रेखाओं के बीच का न्यून कोण ..... होगा। [1]

If the coordinates of the points A, B, C and D are then (1, 2, 3), (4, 5, 7), (-4, 3, -6) and (2, 9, 2) respectively, the acute angle between the lines AB and CD will be ..... .

(vi) यदि दो निष्पक्ष पासों की एक जोड़ी को एक बार उछाला जाता है, तो दोनों पासों पर अंकों का योग 5 होने की प्रायिकता का मान ..... होगा। [1]

If a pair of two unbiased dice is thrown one, then the probability that the sum of the numbers on both the dice is 5 will be ..... .

3. अति लघूत्तरात्मक प्रश्न :

Very short answer type questions :

(i)  $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$  का मुख्य मान ज्ञात कीजिए। [1]

Find the principal value of  $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ .

(ii) निम्नलिखित समीकरण से  $x$  तथा  $y$  के मानों को ज्ञात कीजिए: [1]

$$2 \begin{bmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

(iii) सारणिक  $\begin{vmatrix} 102 & 18 & 36 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix}$  का मान ज्ञात कीजिए। [1]

(iv)  $x = 3$  पर फलन  $f(x) = 2x^2 - 1$  के फलन के सांतत्य की जाँच कीजिए। [1]

Examine the continuity of the function  $f(x) = 2x^2 - 1$  at  $x = 3$ .

(v) किसी उत्पाद की  $x$  इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय  $R(x)$  रुपयों में  $R(x) = 13x^2 + 26x + 15$  से प्रदत्त है। सीमांत आय ज्ञात कीजिए, जब  $x = 7$  है। [1]

The total revenue in Rupees received from the sale of  $x$  units of a product is given by  $R(x) = 13x^2 + 26x + 15$ . find the marginal revenue, when  $x = 7$ .

(vi) प्रथम चतुर्थांश में वक्र  $y^2 = 9x$ ;  $x = 2$ ,  $x = 4$  एवं  $x$ -अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [1]

Find the area of the region bounded by  $y^2 = 9x$ ;  $x = 2$ ,  $x = 4$  and the  $x$ -axis in the first quadrant.

(vii) बिन्दुओं  $P(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$  और  $Q(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$  को मिलाने वाली रेखा को 2 : 1 के अनुपात में अन्तर विभाजित करने वाले बिन्दु R का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए। [1]

Find the position vector of a point R which internally divides the line joining two points P and Q whose position vectors are  $(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$  and  $(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$  respectively in the ratio 2 : 1.

- (viii) सदिशों  $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$  और  $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$  के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। [1]

Find the angle between the vectors  $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$  and  $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ .

- (ix) दर्शाइए कि बिन्दुओं (1, -1, 2) और (3, 4, -2) से होकर जाने वाली रेखा, बिन्दुओं (0, 3, 2) और (3, 5, 6) से जाने वाली रेखा पर लंब है। [1]

Show that the line through the points (1, -1, 2) and (3, 4, -2) is perpendicular to the line through the points (0, 3, 2) and (3, 5, 6).

- (x) एक रेखा का कार्तीय समीकरण  $\frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-6}{2}$  है। इसका सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए। [1]

The cartesian equation of a line is  $\frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-6}{2}$ . Write its vector form.

- (xi) समतल  $2x + y - z = 5$  द्वारा निर्देशी अक्षों पर काटे गए अंतः खंडों को ज्ञात कीजिए। [1]

Find the intercepts cut off by the plane  $2x + y - z = 5$  on co-ordinate axes.

- (xii) एक अनभिनत (unbiased) पासे को दो बार उछाला गया। मान लें A घटना 'पहली उछाल पर विषम संख्या प्राप्त होना' और B घटना 'द्वितीय उछाल पर विषम संख्या प्राप्त होना' दर्शाते हैं। घटनाओं A और B के स्वातंत्र्य का परीक्षण कीजिए। [1]  
An unbiased die is thrown twice. Let the event A be 'odd number on the first throw' and B the event 'odd number on the second throw'. Check the independence of the events A and B.

### खण्ड-ब (Section-B)

लघूत्तरीय प्रश्न :

Short answer type questions :

4. यदि  $f(x) = \frac{(4x+3)}{(6x-4)}$ ,  $x \neq \frac{2}{3}$ , तो सिद्ध कीजिए की सभी  $x \neq \frac{2}{3}$  के लिए  $(f \circ f)(x) = x$  है। [2]

If  $f(x) = \frac{(4x+3)}{(6x-4)}$ ,  $x \neq \frac{2}{3}$ , show that  $(f \circ f)(x) = x$  for all  $x \neq \frac{2}{3}$ .

5. यदि  $A = \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix}$  हो, तो सत्यापित कीजिए  $A'A = I$  [2]

If  $A = \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix}$ , then verify that  $A'A = I$ .

6. सिद्ध कीजिए कि  $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ba & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$ . [2]

7. दर्शाइए कि बिन्दु  $A(a, b + c)$ ,  $B(b, c + a)$  और  $C(c, a + b)$  संरेख हैं। [2]  
Show that the points  $A(a, b + c)$ ,  $B(b, c + a)$  and  $C(c, a + b)$  are collinear.

8. सिद्ध कीजिए कि फलन  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & \text{यदि } x \neq 0 \\ 1, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$   $x = 0$  पर संतत नहीं है। [2]

Prove that the function  $f$  given by  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & \text{if } x \neq 0 \\ 1, & \text{if } x = 0 \end{cases}$  is not continuous at  $x = 0$ .



9. अंतराल ज्ञात कीजिए जिसमें  $f(x) = x^2 - 4x + 6$  से प्रदत्त फलन  $f$   
 i) वर्धमान है  
 ii) ह्रासमान है [2]

Find the intervals in which the function  $f$  given by  $f(x) = x^2 - 4x + 6$  is

- i) Increasing  
 ii) Decreasing
10.  $x$  मीटर भुजा वाले घन की भुजा में 2% की वृद्धि के कारण से घन के आयतन में सन्निकट परिवर्तन ज्ञात कीजिए। [2]  
 Find the approximate change in the volume of a cube of side  $x$  meter caused by increasing the side by 2%.

11.  $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x + 4}} dx$  का मान ज्ञात कीजिए। [2]

12. परवलय  $y^2 = 4ax$  और उसके नाभिलंब से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [2]

Find the area of the region bounded by the parabola  $y^2 = 4ax$  and its latus rectum.

13.  $y$ -अक्ष को मूल बिन्दु पर स्पर्श करने वाले वृत्तों के कुल का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए। [2]

Form the differential equation of the family of circles touching the  $y$ -axis at origin.

14. दिए हुए सदिशों  $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$  और  $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$  के लिए सदिश  $\vec{a} + \vec{b}$  के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए। [2]

For given vectors,  $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$  and  $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ , find the unit vector in the direction of the vector  $\vec{a} + \vec{b}$ .

15. समतलों, जिनके सदिश समीकरण  $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 5$  और  $\vec{r} \cdot (3\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) = 3$  है, के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। [2]

Find the angle between the planes whose vector equations are  $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 5$  and  $\vec{r} \cdot (3\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) = 3$ .

16. यदि एक न्याय सिक्के को 10 बार उछाला गया, तो ठीक छःचित आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। [2]  
 If a fair coin is tossed 10 times, find the probability of exactly six heads.

### खण्ड-स (Section-C)

17. यदि  $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5} + \cos^{-1}x\right) = 1$ , तो  $x$  का मान ज्ञात कीजिए। [3]

अथवा/OR

दर्शाइए कि  $\sin^{-1}\frac{3}{5} - \sin^{-1}\frac{8}{17} = \cos^{-1}\frac{84}{85}$ .

18.  $x$  के सापेक्ष  $(\log x)^{\cos x}$  का अवकलन कीजिए। [3]  
 Differentiate  $(\log x)^{\cos x}$  with respect to  $x$ .

अथवा/OR

यदि  $y = 500e^{7x} + 600e^{-7x}$  है, तो दर्शाइए कि  $\frac{d^2y}{dx^2} = 49y$ .

19.  $\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}} dx$  का मान ज्ञात कीजिए। [3]

अथवा/OR

$\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6} dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

20. दर्शाइए कि सदिश  $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ,  $\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$  और  $3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$  एक समकोण त्रिभुज के शीर्षों की रचना करते हैं। [3]  
 Show that the vectors  $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ,  $\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$  and  $3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$  form the vertices of a right angled triangle.

अथवा/OR

एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसके शीर्ष A(1, 1, 1), B(1, 2, 3) और C(2, 3, 1) हैं।

Find the area of a triangle having the points A(1, 1, 1), B(1, 2, 3) and C(2, 3, 1) as its vertices.

### खण्ड-द (Section-D)

21.  $\int_{-1}^1 5x^4 \sqrt{x^5 + 1} dx$  का मान ज्ञात कीजिए। [4]

अथवा/OR

$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

22. किसी बैंक में मूलधन की वृद्धि 5% वार्षिक की दर से होती है। इस बैंक में रु. 1,000 जमा कराये जाते हैं। ज्ञात कीजिए कि 10 वर्ष बाद यह राशि कितनी हो जायेगी ( $e^{0.5} = 1.648$ )। [4]

In a bank, principal increases continuously at the rate of 5% per year. An amount of Rs. 1,000 is deposited with this bank. How much will it worth after 10 years ( $e^{0.5} = 1.648$ ).

अथवा/OR

अवकल समीकरण  $y dx - (x + 2y^2) dy = 0$  का व्यापक हल ज्ञात कीजिये।

Find the general solution of the differential equation  $y dx - (x + 2y^2) dy = 0$ .

23. निम्नलिखित व्यवरोधों के अंतर्गत  $Z = 5x + 3y$  का आलेखीय विधि से अधिकतमीकरण कीजिए। [4]

$3x + 5y \leq 15$ ,  $5x + 2y \leq 10$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$

Maximize  $Z = 5x + 3y$  subject to constraints  $3x + 5y \leq 15$ ,  $5x + 2y \leq 10$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  by using graphical method.

अथवा/OR

निम्नलिखित व्यवरोधों के अंतर्गत  $Z = 200x + 500y$  का आलेखीय विधि से न्यूनतमीकरण कीजिए।

$x + 2y \geq 10$ ,  $3x + 4y \leq 24$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .

Minimize  $Z = 200x + 500y$  subject to constraints  $x + 2y \geq 10$ ,  $3x + 4y \leq 24$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  by using graphical method.

# गणित भाग-1 ( कक्षा-12 )

## सम्बन्ध एवं फलन (RELATION AND FUNCTION)

1

अध्याय

- 1.1 भूमिका (Introduction)
- 1.2 क्रमित युग्म (Ordered Pair)
- 1.3 दो समुच्चयों का कार्तीय गुणन (Cartesian Product of Two Sets)
- 1.4 सम्बन्ध (Relation)
- 1.5 सम्बन्ध का प्रांत तथा परिसर (Domain and Range of a Relation)
- 1.6 प्रतिलोम सम्बन्ध (Inverse Relation)
- 1.7 सम्बन्धों के प्रकार (Types of Relations)
- 1.8 स्वतुल्य सम्बन्ध (Reflexive Relation)
- 1.9 सममित सम्बन्ध (Symmetric Relation)
- 1.10 संक्रामक सम्बन्ध (Transitive Relation)
- 1.11 तुल्यता सम्बन्ध (Equivalence Relation)
- 1.12 तत्समक सम्बन्ध (Identity Relation)
- 1.13 तुच्छ सम्बन्ध (Trivial Relation)
- 1.14 फलनों के प्रकार (Types of Functions)
- 1.15 एकैकी फलन (One-One Function or Injective Function)
- 1.16 बहु-एकी फलन (Many-One Function)
- 1.17 अन्तर्क्षेपी फलन (Into Function)
- 1.18 एकैकी अन्तर्क्षेपी फलन (One-One Into Function)
- 1.19 बहु-एकी अन्तर्क्षेपी फलन (Many-One Into Function)
- 1.20 आच्छादक फलन (Onto or Surjective Function)
- 1.21 एकैकी आच्छादक फलन (One-One Onto Function or Bijection)
- 1.22 बहु-एकी आच्छादक फलन (Many-One Onto Function)
- 1.23 तत्समक फलन (Identity Function)
- 1.24 अचर फलन (Constant Function)
- 1.25 फलनों का संयोजन तथा व्युत्क्रमणीय फलन (Composition of Functions and Invertible Function)

### 1.1 भूमिका ( INTRODUCTION )

☆ कक्षा XI में हम समुच्चय, उपसमुच्चय, कार्तीय गुणन, सम्बन्ध, प्रान्त व सहप्रान्त, सम्बन्ध का परिसर, फलन, फलन का प्रान्त, सहप्रान्त तथा परिसर का विस्तार से अध्ययन कर चुके हैं। इस अध्याय में कक्षा XI की उपरोक्त परिभाषाओं का प्रत्यास्मरण कर सम्बन्धों तथा फलनों के प्रकारों का विस्तार से अध्ययन करेंगे।

### 1.2 क्रमित युग्म ( ORDERED PAIR )

☆ सामान्यतः समुच्चय के अवयवों के क्रम में परिवर्तन करने पर

समुच्चय में कोई भी परिवर्तन नहीं होता। जैसे  $\{1, 2\} = \{2, 1\}$  लेकिन यदि किसी समुच्चय में अवयवों के क्रम का भी महत्व हो तो ऐसे समुच्चय को क्रमित समुच्चय (ordered set) कहते हैं। इसी प्रकार यदि दो अवयवों वाले समुच्चय  $\{a, b\}$  में  $a$  का पहला स्थान तथा  $b$  का दूसरा स्थान निर्धारित कर दिया जाये तो यह समुच्चय **क्रमित युग्म** (Ordered Pair) कहलाता है तथा इसे संकेत  $(a, b)$  द्वारा व्यक्त किया जाता है। यहाँ  $(a, b) \neq (b, a)$  परिभाषा से स्पष्ट है कि

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ तथा } b = d$$

- ☆ यदि किसी क्रमित समुच्चय में अवयवों की संख्या  $n$  हो तो ऐसे समुच्चय को क्रमित  $n$  — ट्युपल (Ordered  $n$ —tuple) कहा जाता है तथा इसे  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  से व्यक्त करते हैं। जैसे—द्विविमीय निर्देशांक  $(x, y)$  तथा त्रिविमीय निर्देशांक  $(x, y, z)$  में क्रम का महत्व है।

### 1.3 दो समुच्चयों का कार्तीय गुणन (CARTESIAN PRODUCT OF TWO SETS)

- ☆ दो समुच्चयों  $A$  और  $B$  का कार्तीय गुणन उन क्रमित युग्मों  $(a, b)$  का समुच्चय होता है जिनका पहला अवयव  $a$ , समुच्चय  $A$  का अवयव हो तथा दूसरा अवयव  $b$ , समुच्चय  $B$  का अवयव हो। इस गुणन को संकेत  $A \times B$  द्वारा व्यक्त किया जाता है अतः
- $$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$
- ☆ परिभाषा से स्पष्ट है कि  $A \times B \neq B \times A$  जब तक कि  $A$  और  $B$  बराबर न हों।
- ☞ उदाहरण—यदि  $A = \{p, q, r\}$  तथा  $B = \{x, y\}$  हो तो
- $$A \times B = \{(p, x), (p, y), (q, x), (q, y), (r, x), (r, y)\}$$
- $$B \times A = \{(x, p), (y, p), (x, q), (y, q), (x, r), (y, r)\}$$
- ☆ टिप्पणियाँ—
- यदि  $A = \phi$  अथवा  $B = \phi$ , तब  $A \times B = \phi$  यहाँ  $\phi$  रिक्त समुच्चय है।
  - यदि  $A = \phi$  तथा  $B = \phi$ , तब  $A \times B = \phi$
  - यदि समुच्चय  $A$  में अवयवों की संख्या  $m$  तथा समुच्चय  $B$  में अवयवों की संख्या  $n$  हो तो  $A \times B$  में  $m \times n$  अवयव होंगे अतः इसके अरिक्त उपसमुच्चयों की संख्या  $2^{mn} - 1$  होगी।
  - यदि  $A$  तथा  $B$  अरिक्त समुच्चय हों तथा उनमें से एक अथवा दोनों अपरिमित समुच्चय हों तो  $A \times B$  में अवयवों की संख्या अनन्त होगी अर्थात्  $A \times B$  भी एक अपरिमित समुच्चय होगा।
  - $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
  - $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
  - $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
  - $A \subseteq B \Rightarrow A \times C \subseteq B \times C$
  - $A \subseteq B, C \subseteq D \Rightarrow (A \times C) \subseteq (B \times D)$

### 1.4 सम्बन्ध (RELATION)

- ☆ समुच्चय  $A$  से समुच्चय  $B$  में परिभाषित सम्बन्ध  $R$ , कार्तीय गुणन  $A \times B$  का कोई उपसमुच्चय होता है। अर्थात्  $R \subseteq A \times B$ । इसे प्रायः निम्न प्रकार से लिखते हैं—
- $$R = \{(x, y) \mid xRy, x \in A, y \in B\}$$
- ☆  $a$  और  $b$  सम्बन्ध  $R$  द्वारा सम्बन्धित हैं तो इस तथ्य को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं—
- $$a R b \text{ या } (a, b) \in R$$

- ☆  $a$  और  $b$  सम्बन्ध  $R$  द्वारा सम्बन्धित नहीं हैं तो तथ्य को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं—

$$a \not R b \text{ या } (a, b) \notin R$$

☞ उदाहरण 1. यदि  $A = \{3, 5, 7, 9\}$ ,  $B = \{4, 6, 8, 10\}$  तथा  $P(x, y) = x, y$  से छोटा है, तब

$$R = \{A, B, P(x, y)\}$$

$A$  से  $B$  में एक सम्बन्ध है। इस सम्बन्ध के अन्तर्गत  $3R4$ ,  $3R6$ ,  $3R8$ ,  $3R10$ ,  $5R6$ ,  $5R8$ ,  $5R10$ ,  $7R8$ ,  $7R10$ ,  $9R10$ , लेकिन  $5 \not R 4$ ,  $7 \not R 4$ ,  $7 \not R 6$ ,  $9 \not R 4$ ,  $9 \not R 6$ ,  $9 \not R 8$ ,

इसे हम इस प्रकार से भी व्यक्त कर सकते हैं—

$(3, 4) \in R$ ,  $(3, 6) \in R$ ,  $(3, 8) \in R$ ,  $(3, 10) \in R$ ,  $(5, 6) \in R$ ,  $(5, 8) \in R$ ,  $(5, 10) \in R$ ,  $(7, 8) \in R$ ,  $(7, 10) \in R$ ,  $(9, 10) \in R$ , परन्तु  $(5, 4) \notin R$ ,  $(7, 4) \notin R$ ,  $(7, 6) \notin R$ ,  $(9, 4) \notin R$ ,  $(9, 6) \notin R$ ,  $(9, 8) \notin R$  इत्यादि। तब  $R = \{(3, 4), (3, 6), (3, 8), (3, 10), (5, 6), (5, 8), (5, 10), (7, 8), (7, 10), (9, 10)\}$

☞ उदाहरण 2. यदि  $A = \{2, 3, 4\}$ ,  $B = \{3, 6, 8\}$  तथा  $P(x, y) = x, y$  का भाजक है, तब

$$R = \{A, B, P(x, y)\}$$

$A$  से  $B$  में एक सम्बन्ध है। इस सम्बन्ध के अन्तर्गत  $2R6$ ,  $2R8$ ,  $3R3$ ,  $3R6$ ,  $4R8$  लेकिन  $2 \not R 3$ ,  $3 \not R 8$ ,  $4 \not R 3$ ,  $4 \not R 6$ , अर्थात्  $(2, 6) \in R$ ,  $(2, 8) \in R$ ,  $(3, 3) \in R$ ,  $(3, 6) \in R$ ,  $(4, 8) \in R$ , परन्तु  $(2, 3) \notin R$ ,  $(3, 8) \notin R$ ,  $(4, 3) \notin R$ ,  $(4, 6) \notin R$  इत्यादि।

☞ उदाहरण 3. यदि  $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ ,  $B = \{1, 4, 6, 9\}$  तथा  $P(x, y) : x$  का दुगुना  $y$  है तब  $R = \{A, B, P(x, y)\}$   $A$  से  $B$  में एक सम्बन्ध है जिसके अन्तर्गत  $2R4$ ,  $3R6$  लेकिन  $1 \not R 4$ ,  $3 \not R 9$  इत्यादि। इसे हम इस प्रकार भी व्यक्त कर सकते हैं—  
 $(2, 4) \in R$ ,  $(3, 6) \in R$ , परन्तु  $(1, 4) \notin R$ ,  $(3, 9) \notin R$  इत्यादि।

- ☆ टिप्पणी—उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि

- यह आवश्यक नहीं है कि  $A$  के प्रत्येक अवयव का सम्बन्ध  $B$  के किसी न किसी अवयव से हो अर्थात्  $A$  में ऐसे अवयव हो सकते हैं जो  $B$  के किसी अवयव से सम्बन्धित नहीं हों।
- $A$  के किसी अवयव का सम्बन्ध  $B$  के एक या अधिक अवयवों से हो सकता है।
- $A$  के एक से अधिक अवयवों का सम्बन्ध  $B$  के एक अवयव से हो सकता है।
- $A$  के किसी भी अवयव का सम्बन्ध  $B$  के किसी भी अवयव से नहीं भी हो सकता है।
- $A$  के सभी अवयवों का सम्बन्ध  $B$  के सभी अवयवों से हो सकता है।

- ☆ नोट—यदि  $A$  तथा  $B$  में अवयवों की संख्या क्रमशः  $m$  तथा  $n$  हो तो  $A \times B$  में अवयवों की संख्या  $m \times n$  होगी। इसके अरिक्त

उपसमुच्चयों की संख्या  $2^{mn} - 1$  होगी। अर्थात् A से B में परिभाषित होने वाले अरिक्त सम्बन्धों की संख्या भी  $2^{mn} - 1$  होगी।

### 1.5 सम्बन्ध का प्रान्त तथा परिसर (DOMAIN AND RANGE OF A RELATION)

☆ यदि R, समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित कोई सम्बन्ध हो, तो R के क्रमित युग्मों के प्रथम अवयवों के समुच्चय को सम्बन्ध R का प्रान्त (Domain) तथा द्वितीय अवयवों के समुच्चय को सम्बन्ध R का परिसर (Range) कहते हैं। अतः

$$R \text{ का प्रान्त} = \{a | (a, b) \in R\}$$

$$R \text{ का परिसर} = \{b | (a, b) \in R\}$$

उपर्युक्त से स्पष्ट है कि R का प्रान्त A का उपसमुच्चय तथा R का परिसर B का उपसमुच्चय होगा।

☞ उदाहरण 1. यदि  $A = \{2, 4, 6, 8\}$ ,  $B = \{3, 5, 9\}$  तथा A से B में एक सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित है कि  $xRy \Leftrightarrow x, y$  से बड़ा है, तब

$$R = \{(4, 3), (6, 3), (6, 5), (8, 3), (8, 5)\}$$

उपर्युक्त सम्बन्ध में

$$R \text{ का प्रान्त} = \{4, 6, 8\}$$

$$R \text{ का परिसर} = \{3, 5\}$$

☞ उदाहरण 2. यदि  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  तथा  $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

माना  $R = \{(a, b) | a \in A, b \in B, a, b \text{ का भाजक है}\}$

A से B में एक सम्बन्ध हो तब

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (1, 10), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 10), (3, 6), (4, 4), (4, 8), (5, 10)\}$$

अतः R का प्रान्त =  $\{1, 2, 3, 4, 5\} = A$

$$R \text{ का परिसर} = \{2, 4, 6, 8, 10\} = B$$

☞ उदाहरण 3. Z में परिभाषित एक सम्बन्ध

$$R = \{(x, y) | x, y \in Z, x^2 + y^2 \leq 4\}$$

तब R का प्रान्त =  $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

तथा R का परिसर =  $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

☞ उदाहरण 4. यदि N पर  $R = \{(x, y) : x + 2y = 8\}$  एक सम्बन्ध है, तो R का परिसर लिखिए।

हल—यहाँ  $xRy \Leftrightarrow x + 2y = 8$

$$\Leftrightarrow y = \frac{8-x}{2}, x \in N, y \in N$$

$$\text{जब } x = 2, y = \frac{8-2}{2} = 3 \in N$$

$$x = 4, y = \frac{8-4}{2} = 2 \in N$$

$$x = 6, y = \frac{8-6}{2} = 1 \in N$$

$$x = 8, y = \frac{8-8}{2} = 0 \notin N$$

अतः R का परिसर =  $\{1, 2, 3\}$  उत्तर

### 1.6 प्रतिलोम सम्बन्ध ( INVERSE RELATION )

☆ माना R, समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित एक सम्बन्ध है। तब R का प्रतिलोम सम्बन्ध  $R^{-1}$ , समुच्चय B से समुच्चय A में निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है—

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in R\}$$

$$\text{अर्थात् } (a, b) \in R \Leftrightarrow (b, a) \in R^{-1}$$

$$\text{या } aRb \Leftrightarrow bR^{-1}a$$

परिभाषा से स्पष्ट है कि  $R^{-1}$  का प्रान्त = R का परिसर तथा  $R^{-1}$  का परिसर = R का प्रान्त

☞ उदाहरण 1. यदि  $A = \{1, 2, 3\}$ , और  $B = \{0, 4\}$  तथा सम्बन्ध R, समुच्चय A से समुच्चय B में इस प्रकार परिभाषित है कि

$$R = \{(1, 0), (2, 0), (3, 0)\}$$

तब R का प्रतिलोम सम्बन्ध होगा—

$$R^{-1} = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3)\}$$

उपर्युक्त से स्पष्ट है कि

$$R^{-1} \text{ का प्रान्त} = \{0\} = R \text{ का परिसर}$$

$$R^{-1} \text{ का परिसर} = \{1, 2, 3\} = R \text{ का प्रान्त}$$

☞ उदाहरण 2. यदि N में सम्बन्ध “x, y से छोटा है” द्वारा परिभाषित हो तो  $R = \{(x, y) | x, y \in N, x < y\}$  तो इसका प्रतिलोम सम्बन्ध  $R^{-1} = \{(x, y) | x, y \in N, x > y\}$  जो “x, y से बड़ा है” द्वारा परिभाषित है।

### 1.7 सम्बन्धों के प्रकार ( TYPES OF RELATIONS )

☆ सम्बन्ध निम्न प्रकार के होते हैं—

- स्वतुल्य सम्बन्ध (Reflexive Relation)
- सममित सम्बन्ध (Symmetric Relation)
- संक्रामक सम्बन्ध (Transitive Relation)
- तुच्छ सम्बन्ध (Trivial Relation)

### 1.8 स्वतुल्य सम्बन्ध ( REFLEXIVE RELATION )

☆ यदि सम्बन्ध R किसी समुच्चय A में इस प्रकार परिभाषित हो कि इसके अन्तर्गत A का प्रत्येक अवयव स्वयं से सम्बन्धित हो, तो सम्बन्ध R स्वतुल्य सम्बन्ध कहलाता है। अतः R स्वतुल्य सम्बन्ध है यदि और केवल यदि  $aRa \forall a \in A$

$$\text{अर्थात् } R \text{ स्वतुल्य सम्बन्ध है } \Leftrightarrow (a, a) \in R, \forall a \in A$$

☆ उपर्युक्त परिभाषा से स्पष्ट है कि A में परिभाषित सम्बन्ध R स्वतुल्य सम्बन्ध नहीं होगा यदि A में कम से कम एक अवयव a ऐसा हो, जो स्वयं से सम्बन्धित न हो अर्थात्  $(a, a) \notin R$

☆ किसी समुच्चय A में परिभाषित स्वतुल्य सम्बन्ध R तथा तत्समक सम्बन्ध  $I_A$  की परिभाषाओं से स्पष्ट होता है कि  $I_A, R$  का उपसमुच्चय (Subset) होता है, अर्थात्  $I_A \subseteq R$   
अतः किसी समुच्चय A का तत्समक सम्बन्ध  $I_A$ , आवश्यक रूप से A में एक स्वतुल्य सम्बन्ध होता है, परन्तु A में

परिभाषित प्रत्येक स्वतुल्य सम्बन्ध का तत्समक होना आवश्यक नहीं है।

☆ **टिप्पणी**—स्वतुल्य सम्बन्ध के लिए  $(a, a) \in R$  परन्तु इसका अर्थ यह नहीं है कि अवयव  $a$  का सम्बन्ध  $a$  के अतिरिक्त दूसरे अवयव से न हो। अर्थात्  $a$  का सम्बन्ध स्वयं से होने के साथ  $A$  के अन्य अवयवों से भी हो सकता है। जबकि तत्समक सम्बन्ध में  $a$  का सम्बन्ध  $a$  तथा केवल  $a$  से होता है। अतः स्पष्ट है कि प्रत्येक तत्समक सम्बन्ध स्वतुल्य सम्बन्ध है परन्तु स्वतुल्य सम्बन्ध तत्समक सम्बन्ध नहीं होता है।

स्वतुल्य सम्बन्ध की परिभाषा को स्पष्ट करने के लिए निम्न उदाहरण दिये जा रहे हैं—

☞ **उदाहरण 1.** यदि  $N$  प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है और  $N$  में एक सम्बन्ध  $R$  इस प्रकार परिभाषित है कि

$$xRy \Leftrightarrow x, y \text{ का भाजक है, } \forall x, y \in N$$

तो  $R$  एक स्वतुल्य सम्बन्ध होगा, क्योंकि प्रत्येक प्राकृत संख्या स्वयं का भाजक है।

☞ **उदाहरण 2.** किसी समतल में स्थित सरल रेखाओं के समुच्चय  $A$  में एक सम्बन्ध  $R$  यदि इस प्रकार परिभाषित हो कि  $xRy \Leftrightarrow x, y$  के समान्तर है तो  $R$  एक स्वतुल्य सम्बन्ध होगा, क्योंकि प्रत्येक रेखा स्वयं के समान्तर होती है।

☞ **उदाहरण 3.** यदि त्रिभुजों के समुच्चय  $B$  में एक सम्बन्ध  $R$  इस प्रकार से परिभाषित है कि

$xRy \Leftrightarrow x, y$  के सर्वांगसम (congruent) है तो  $R$  एक स्वतुल्य सम्बन्ध होगा, क्योंकि प्रत्येक त्रिभुज स्वयं के सर्वांगसम (congruent) होता है।

☞ **उदाहरण 4.** समुच्चयों के समुच्चय  $S$  में एक सम्बन्ध  $R$  निम्न प्रकार परिभाषित है कि  $ARB \Leftrightarrow A, B$  का उपसमुच्चय है तो  $R$  एक स्वतुल्य सम्बन्ध होगा क्योंकि प्रत्येक समुच्चय स्वयं का उपसमुच्चय होता है।

☞ **उदाहरण 5.** प्राकृत संख्याओं के समुच्चय  $N$  में यदि एक सम्बन्ध  $R$  इस प्रकार परिभाषित किया जाये कि  $xRy \Leftrightarrow x \geq y$  तो  $R$  एक स्वतुल्य सम्बन्ध है क्योंकि  $x \in N \Rightarrow x = x$  परन्तु यदि  $R$  इस प्रकार परिभाषित हो कि  $xRy \Leftrightarrow x > y$  तब यह सम्बन्ध स्वतुल्य नहीं होगा क्योंकि  $N$  के किसी भी अवयव के लिए  $x > x$  सत्य नहीं है।

☞ **उदाहरण 6.** माना  $A = \{a, b, c, d\}$  तथा

$R = \{(a, a), (a, d), (b, a), (b, b), (c, d), (c, c), (d, d)\}$   
 $A$  में परिभाषित कोई सम्बन्ध है तो  $R$  एक स्वतुल्य सम्बन्ध है क्योंकि  $(a, a) \in R, (b, b) \in R, (c, c) \in R$  तथा  $(d, d) \in R$  परन्तु यदि  $A$  में कोई सम्बन्ध  $R_1$  इस प्रकार से परिभाषित हो कि

$R_1 = \{(a, a), (a, d), (b, c), (b, d), (c, c), (c, d), (d, b)\}$   
 तब  $R_1$  स्वतुल्य नहीं है क्योंकि  $b \in A$  परन्तु  $(b, b) \notin R_1$  उसी प्रकार  $d \in A$  परन्तु  $(d, d) \notin R_1$

### 1.9

### सममित सम्बन्ध ( SYMMETRIC RELATION )

☆ यदि सम्बन्ध  $R$  किसी समुच्चय  $A$  में इस प्रकार से परिभाषित हो कि जब  $a$  का  $b$  से सम्बन्ध हो तो  $b$  का  $a$  से वही सम्बन्ध होगा, तो सम्बन्ध  $R$  **सममित सम्बन्ध** कहलाता है। अतः  $R$  सममित सम्बन्ध होगा, यदि और केवल यदि  $aRb \Rightarrow bRa, \forall a, b \in A$  अर्थात्  $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R, \forall a, b \in A$  उपर्युक्त से स्पष्ट है कि समुच्चय  $A$  में परिभाषित सम्बन्ध  $R$  सममित नहीं होगा यदि समुच्चय  $A$  में कम से कम दो अवयव  $a, b$  ऐसे हों कि

$$a R b \text{ परन्तु } b \not R a$$

☆ **नोट**—सममित सम्बन्ध  $R$  का प्रतिलोम सम्बन्ध भी स्वयं के बराबर होता है अर्थात्  $R = R^{-1}$

सममित सम्बन्ध की परिभाषा को स्पष्ट करने के लिए निम्न उदाहरण दिये जा रहे हैं—

☞ **उदाहरण 1.** एक समतल में स्थित सरल रेखाओं के समुच्चय  $A$  में एक सम्बन्ध  $R$  इस प्रकार परिभाषित है कि  $xRy \Leftrightarrow x, y$  के लम्बवत् है तो  $R$  एक सममित सम्बन्ध होगा क्योंकि यदि सरल रेखा  $x$ , रेखा  $y$  के लम्बवत् है तो रेखा  $y$  भी रेखा  $x$  के लम्बवत् होगी।

☞ **उदाहरण 2.** त्रिभुजों के समुच्चय  $A$  में “सर्वांगसम ( $\cong$ )” का सम्बन्ध सममित है क्योंकि  $\Delta_1 \cong \Delta_2 \Rightarrow \Delta_2 \cong \Delta_1$

☞ **उदाहरण 3.** यदि प्राकृत संख्याओं के समुच्चय  $N$  में एक सम्बन्ध  $R$  इस प्रकार से परिभाषित है कि

$xRy \Leftrightarrow x, y$  के बराबर (Equal) है, तो  $R$  एक सममित सम्बन्ध होगा, क्योंकि किन्हीं दो प्राकृत संख्याओं  $x$  तथा  $y$  के लिए, यदि  $x, y$  के बराबर है तो  $y, x$  के बराबर होता है।

☞ **उदाहरण 4.** यदि किसी समतल में स्थित सरल रेखाओं के समुच्चय  $A$  में एक सम्बन्ध  $R$  इस प्रकार परिभाषित है कि  $xRy \Leftrightarrow x, y$  के समान्तर है तो  $R$  एक सममित सम्बन्ध है क्योंकि यदि रेखा  $l_1$  रेखा  $l_2$  के समान्तर है तो रेखा  $l_2$  रेखा  $l_1$  के समान्तर होगी।

☞ **उदाहरण 5.** यदि समुच्चय  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  पर दो सम्बन्ध  $R_1$  तथा  $R_2$  निम्न प्रकार परिभाषित किये जायें कि  $R_1 = \{(1, 3), (1, 4), (3, 1), (2, 2), (4, 1), (4, 4)\}$  तथा  $R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3)\}$  तब  $R_1$  एक सममित सम्बन्ध है, परन्तु  $R_2$  सममित नहीं है क्योंकि  $(1, 3) \in R_2$  परन्तु  $(3, 1) \notin R_2$

### 1.10

### संक्रामक सम्बन्ध ( TRANSITIVE RELATION )

☆ यदि सम्बन्ध  $R$  किसी समुच्चय  $A$  में इस प्रकार से परिभाषित हो कि  $a$  का  $b$  से सम्बन्ध और  $b$  का  $c$  से सम्बन्ध होने पर  $a$  का सम्बन्ध  $c$  से हो, तो सम्बन्ध  $R$  **संक्रामक सम्बन्ध** कहलाता है। अतः  $R$  संक्रामक सम्बन्ध होगा, यदि और केवल यदि

$$aRb \text{ और } bRc \Rightarrow aRc \quad \forall a, b, c \in A$$

अर्थात्  $(a, b) \in R$  और  $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$  उपर्युक्त से