नई राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 के तहत सत्र 2023-24 से पाठ्यपुस्तकों को पुनर्संयोजित किया गया है। यह संजीव पास बुक्स पूर्णतः नवीन पुनर्संयोजित पाठ्यपुस्तक पर आधारित है।

पास बुक्स में नं. 1

संजीव®

पास बुक्स

गणित-X

(कक्षा 10 के विद्यार्थियों के लिए नवीनतम पाठ्यक्रमानुसार)

- माध्य. शिक्षा बोर्ड मॉडल पेपर 2022-23 एवं बोर्ड पेपर 2023 के प्रश्नों का अन्दर समावेश
- पाठ्यपुस्तक के सभी अभ्यास प्रश्नों का हल
- सभी प्रकार के अन्य महत्वपूर्ण प्रश्नों का समावेश
- योग्य एवं अनुभवी लेखकों द्वारा लिखित
- प्रथम श्रेणी प्राप्त करने के लिए पूर्ण सामग्री

2024

संजीव प्रकाशन,
जयपुर

मूल्य : ₹ 280/-

प्रकाशक :
संजीव प्रकाशन
धामाणी मार्केट, चौड़ा रास्ता,
जयपुर-3
email : sanjeevprakashanjaipur@gmail.com
website : www.sanjivprakashan.com

मूल्य : ₹ 280.00

लेजर टाइपसैटिंग :
संजीव प्रकाशन (D.T.P. Department), जयपुर

मुद्रक :
पंजाबी प्रेस, जयपुर

★ ★ ★ ★

- इस पुस्तक में त्रुटियों को दूर करने के लिए हर संभव प्रयास किया गया है। किसी भी त्रुटि के पाये जाने पर अथवा किसी भी तरह के सुझाव के लिए आप हमें निम्न पते पर email या पत्र भेजकर सूचित कर सकते हैं—
  email : sanjeevprakashanjaipur@gmail.com
  पता : प्रकाशन विभाग
  संजीव प्रकाशन
  धामाणी मार्केट, चौड़ा रास्ता, जयपुर
  आपके द्वारा भेजे गये सुझावों से अगला संस्करण और बेहतर हो सकेगा।
- इस पुस्तक में प्रकाशित किसी त्रुटि के प्रति तथा इससे होने वाली किसी भी क्षति के लिए लेखक, प्रकाशक, संपादक तथा मुद्रक किसी भी रूप में जिम्मेदार नहीं हैं। ध्यान रखें कि आप उक्त शर्तें मानते हुए ही यह पुस्तक खरीद रहे हैं।
- सभी प्रकार के विवादों का न्यायिक क्षेत्र 'जयपुर' होगा।

विषय-सूची

माध्यमिक परीक्षा, 2023

गणित
(MATHEMATICS)

समय : 3 घण्टे 15 मिनट **पूर्णांक : 80**

परीक्षार्थियों के लिए सामान्य निर्देश :
General Instructions to the Examinees :

1. परीक्षार्थी सर्वप्रथम अपने प्रश्न-पत्र पर अपना नामांक अनिवार्यतः लिखें।
2. **सभी** प्रश्न हल करने अनिवार्य हैं।
3. प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दी गई उत्तर-पुस्तिका में ही लिखें।
4. जिन प्रश्नों में आन्तरिक खण्ड हैं, उन सभी के उत्तर एक साथ ही लिखें।
5. प्रश्न-पत्र के हिन्दी व अंग्रेजी रूपान्तर में किसी प्रकार की त्रुटि/अन्तर/विरोधाभास होने पर हिन्दी भाषा के प्रश्न को ही सही मानें।
6. प्रश्न का उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें।
7. प्रश्न क्रमांक **21** से **23** तक में आन्तरिक विकल्प हैं।
8. अपनी उत्तर-पुस्तिका के पृष्ठों के दोनों ओर लिखिए। यदि कोई रफ़ कार्य करना हो, तो उत्तर-पुस्तिका के अन्तिम पृष्ठों पर करें और इन्हें तिरछी लाइनों से काटकर उन पर 'रफ़ कार्य' लिख दें।
9. प्रश्न क्रमांक **21** का लेखाचित्र ग्राफ पेपर पर बनाइए।

खण्ड-अ (SECTION-A)

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. निम्न वस्तुनिष्ठ प्रश्नों के उत्तर का सही विकल्प चयन कर उत्तर-पुस्तिका में लिखिए।

(i) 196 के अभाज्य गुणनखण्डों की घातों का योगफल है : [1]
(अ) 1 (ब) 2 (स) 4 (द) 6

(ii) यदि द्विघात समीकरण $x^2 - kx + 4 = 0$ के मूल समान हो, तो k का मान होगा— [1]
(अ) ± 1 (ब) ± 2 (स) ± 3 (द) ± 4

(iii) बिन्दु (3, 4) की y-अक्ष में दूरी होगी— [1]
(अ) 1 (ब) 2 (स) 3 (द) 4

(iv) $3x + 2y = 11$ को सन्तुष्ट करने वाला युग्म है— [1]
(अ) (1, 4) (ब) (2, 3) (स) (3, 5) (द) (1, 3)

(v) द्विघात समीकरण $3\sqrt{3}x^2 + 10x + \sqrt{3} = 0$ का विविक्तिकरण होगा : [1]
(अ) 8 (ब) 30 (स) 46 (द) 64

(vi) यदि 18, a, b, -3 समान्तर श्रेढ़ी में है तो $a + b$ का मान होगा— [1]
(अ) 7 (ब) 11 (स) 15 (द) 19

(vii) $3\sec 45^\circ \cos 45^\circ$ का मान होगा— [1]
(अ) 0 (ब) 1 (स) 2 (द) 3

(viii) वृत्त की वह जीवा जिसकी लम्बाई वृत्त की त्रिज्या से दोगुनी हो, कहलाती है— [1]
(अ) त्रिज्यखण्ड (ब) व्यास (स) क्षेत्रफल (द) परिधि

(ix) एक वृत्त की त्रिज्या 3.5 सेमी है, तो वृत्त की परिधि होगी— [1]
(अ) 11 सेमी (ब) 22 सेमी (स) 33 सेमी (द) 44 सेमी

(x) घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 486 वर्ग सेमी. है, घन की भुजा का माप होगा— [1]
(अ) 6 सेमी (ब) 7 सेमी (स) 8 सेमी (द) 9 सेमी

(xi) बंटन 3, 5, 7, 4, 2, 1, 4, 3 और 4 का बहुलक है— [1]

(अ) 1 (ब) 3 (स) 4 (द) 7

(xii) एक पासे को फेंकने पर 4 से बड़ा अंक आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। [1]

(अ) $\frac{1}{2}$ (ब) $\frac{1}{3}$ (स) $\frac{3}{4}$ (द) 1

2. निम्नलिखित प्रश्नों में रिक्त स्थानों की पूर्ति करते हुए उत्तरपुस्तिका में लिखिए।

(i) 95 तथा 152 का महत्तम समापवर्त्तक (HCF) .... हैं। [1]

(ii) वृत्त पर स्थित एक बिन्दु से .... स्पर्श रेखा खींची जा सकती है। [1]

(iii) $\cos^2 45^o$ का मान .... है। [1]

(iv) वृत्त तथा उसकी स्पर्श रेखा के उभयनिष्ठ बिन्दु को .... कहते हैं। [1]

(v) यदि 5, 7, 9, x का समान्तर माध्य 9 हो, तो x का मान .... होगा। [1]

(vi) दो पासों को एक साथ फेंकने पर अंकों का योग 7 आने की प्रायिकता .... होगी। [1]

3. अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

(i) k के किस मान पर समीकरण युग्म $3x - 2y = 0$ तथा $kx + 5y = 0$ के अनन्त हल होंगे? [1]

(ii) द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल ज्ञात करने का श्रीधराचार्य सूत्र लिखिए। [1]

(iii) किसी समान्तर श्रेढ़ी (A.P.) का प्रथम पद "a" एवं सार्वअन्तर "d" हो, तो पाँचवा पद क्या होगा? [1]

(iv) समरूप आकृतियों को परिभाषित कीजिए। [1]

(v) $\dfrac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ}$ का मान ज्ञात कीजिए। [1]

(vi) $\sqrt{1-cos^2\theta}$ का मान $\theta = 60^o$ पर ज्ञात कीजिए। [1]

(vii) 10 मीटर ऊँची मीनार के शिखर से पृथ्वी पर एक बिन्दु का अवनमन कोण 30^o है। बिन्दु की मीनार के आधार से दूरी कितनी होगी? [1]

(viii) एक उर्ध्वाधर छड़ की लम्बाई तथा इसकी छाया की लम्बाई का अनुपात $1 : \sqrt{3}$ हो, तो सूर्य का उन्नयन कोण ज्ञात कीजिए। [1]

(ix) 3 सेमी त्रिज्या लेकर एक वृत्त बनाईये तथा केन्द्र O से 5 सेमी दूर स्थित बिन्दु P से वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ खींचिए और उनका माप लिखिए। [1]

(x) 5 सेमी. लम्बा एक रेखाखण्ड AB खींचिए एवं उसे 2 : 3 के अनुपात में विभाजित कीजिए। दोनों भागों का माप लिखिए। [1]

(xi) किसी वृत्त का त्रिज्यखण्ड उस वृत्त का चतुर्थांश हैं, तो त्रिज्यखण्ड में केन्द्र पर बनने वाले कोण का माप क्या होगा? [1]

(xii) अच्छी प्रकार से फेंटी गई 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। इस पत्ते के दहला होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। [1]

खण्ड-ब (SECTION-B)

4. परिमेय संख्या $\dfrac{13}{125}$ का दशमलव प्रसार लिखिए। [2]

5. बहुपद $x^2 - x - 6$ के शून्यक ज्ञात कीजिए। [2]

6. द्विघात समीकरण $4x^2 - 12x - 9 = 0$ के मूलों की प्रकृति का पता लगाइये। [2]

7. बिन्दुओं (0, 0) और (5, – 3) को जोड़ने वाले रेखाखण्ड के मध्य बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए। [2]

8. एक समतल जमीन पर खड़ी मीनार की छाया उस स्थिति में 40 मीटर अधिक लम्बी हो जाती है जबकि सूर्य का उन्नतांश कोण 60° से घटकर 30° हो जाता है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। [2]
9. 6 सेमी भुजा के नाप वाले एक समबाहुत्रिभुज की रचना कीजिए और फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ दिए हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं की $\frac{2}{3}$ गुनी हों। [2]
10. 4 सेमी. त्रिज्या के एक वृत्त पर ऐसी दो स्पर्श रेखाएँ खींचिए जो एक दूसरे के समान्तर हो। [2]
11. यदि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर हो, तो सिद्ध कीजिए कि वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं? [2]
12. एक वृत्त की त्रिज्या 7 सेमी है तथा एक चाप द्वारा केन्द्र पर आन्तरिक कोण 60° है। इस त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [2]
13. एक शंकु के छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई 4 सेमी. है तथा इसके वृत्तीय सिरों के परिमाप (परिधियाँ) 18 सेमी. और 6 सेमी. हैं। इस छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [2]
14. दो घनों, जिनमें से प्रत्येक का आयतन 64 सेमी^{3} है, के संलग्न फलकों को मिलाकर एक ठोस बनाया जाता है। परिणामी घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [2]
15. निम्न बारम्बारता बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए। [2]

x	1	2	3	4	5	6
f	2	4	5	4	2	2

16. एक डिब्बे में 8 लाल कंचे, 5 सफेद कंचे और 2 हरे कंचे हैं। इस डिब्बे में से एक कंचा यादृच्छया निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि निकाला गया कंचा : [2]
(i) लाल है? (ii) हरा नहीं है?

खण्ड-स (SECTION-C)

17. ऐसे प्रथम 40 धनात्मक पूर्णांकों का योग ज्ञात कीजिए जो 6 से विभाज्य हैं। [3]
18. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष $(2, 3)$, $(-1, 0)$ तथा $(2, -4)$ है। [3]
19. एक कक्षा के छात्रों के प्राप्तांक निम्न बंटन में दिए हुए हैं। इनका माध्यक ज्ञात कीजिए। [3]

प्राप्तांक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
छात्रों की संख्या	4	28	42	20	6

20. केन्द्र O वाले वृत्त पर बाह्य बिन्दु T से दो स्पर्श रेखाएँ TP तथा TQ खींची गई है। सिद्ध कीजिए कि $\angle PTQ = 2\angle OPQ$ है। [3]

खण्ड-द (SECTION-D)

21. निम्न रैखिक समीकरण युग्म को आलेखीय विधि द्वारा हल कीजिए : [4]

$$x + y = 14$$
$$x - y = 4$$

अथवा/OR

एक कक्षा के 10 विद्यार्थियों ने गणित की पहेली प्रतियोगिता में भाग लिया। यदि लड़कियों की संख्या लड़कों की संख्या से 2 अधिक हो, इस स्थिति का बीणगणितीय एवं ग्राफीय निरूपण कीजिए। [4]

22. सिद्ध कीजिए कि : [4]

$$\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \operatorname{cosec} A - \cot A$$

अथवा/OR

सिद्ध कीजिए कि : [4]

$(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

23. निम्न बारम्बारता बंटन का बहुलक ज्ञात कीजिए : [4]

वर्ग	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
बारम्बारता	6	20	44	26	3	1

अथवा/OR

निम्न बारम्बारता बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए : [4]

वर्ग	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
बारंबारता	6	10	13	7	4

गणित-कक्षा 10

अध्याय-1

वास्तविक संख्याएँ

मुख्य बिन्दु

1. अंकगणित की आधारभूत प्रमेय–प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओं के एक गुणनफल के रूप में व्यक्त (गुणनखंडित) किया जा सकता है तथा यह गुणनखण्डन अद्वितीय होता है। इस पर कोई ध्यान दिये बिना कि अभाज्य गुणनखण्ड किस क्रम में आ रहे हैं?

2. अंकगणित की आधारभूत प्रमेय का प्रयोग हम दो अनुप्रयोग में करेंगे—

(i) प्रथम अनुप्रयोग में कुछ संख्याओं जैसे—$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ और $\sqrt{5}$ आदि को अपरिमेयता सिद्ध करने में करेंगे।

(ii) किसी दी गई संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात करने में करेंगे।

3. महत्तम समापवर्तक–किन्हीं दी हुई संख्याओं के सबसे बड़े समापवर्तक (Common factor) को उन संख्याओं का म.स. कहते हैं।

$\therefore$ HCF = संख्याओं में प्रत्येक उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्ड की सबसे छोटी घात का गुणनफल।

4. लघुत्तम समापवर्त्य–दी गई संख्याओं का सबसे छोटा उभयनिष्ठ गुणज ही उनका ल.स. होता है।

$\therefore$ LCM = संख्याओं में सम्बद्ध प्रत्येक अभाज्य गुणनखण्ड की सबसे बड़ी घात का गुणनफल।

5. दो संख्याओं के म.स. तथा ल.स. में संबंध–दो संख्याओं के म.स. तथा ल.स. का गुणनफल उन संख्याओं के गुणनफल के बराबर होता है।

अर्थात् म.स. (H.C.F.) × ल.स. (L.C.M.)

= प्रथम संख्या (a) × द्वितीय संख्या (b)

या $\boxed{\text{H.C.F.} \times \text{L.C.M.} = a \times b}$

6. इस मुख्य सम्बन्ध की सहायता से निम्नांकित सम्बन्ध भी लिखे जा सकते हैं–

(i) $\text{H.C.F.} = \dfrac{a \times b}{\text{L.C.M.}}$ (ii) $\text{L.C.M.} = \dfrac{a \times b}{\text{H.C.F.}}$

(iii) $a = \dfrac{\text{H.C.F.} \times \text{L.C.M.}}{b}$ (iv) $b = \dfrac{\text{H.C.F.} \times \text{L.C.M.}}{a}$

7. किसी परिमेय संख्या, माना कि $\dfrac{p}{q}$ (q $\neq$ 0) का दशमलव प्रसार कब सांत होता है तथा कब असांत आवर्ती होता है। ऐसा हम $\dfrac{p}{q}$ का हर q के अभाज्य गुणनखण्ड देखकर ज्ञात करते हैं।

8. एक संख्या 'S' अपरिमेय संख्या कहलाती है, यदि उसे $\dfrac{p}{q}$ के रूप में नहीं लिखा जा सकता है, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और q $\neq$ 0 है। जैसे—$\sqrt{2}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{15}$ π, $\dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, 0.10110111011110 इत्यादि

9. यदि p कोई अभाज्य संख्या है और p, a^2 को विभाजित करता है तो p, a को भी विभाजित करेगा, जहाँ a एक धनात्मक पूर्णांक है।

अपरिमेय संख्याएँ–ऐसी संख्याएँ जिनके दशमलव प्रसार असांत अनावर्ती होते हैं, अपरिमेय संख्याएँ कहलाती हैं।

उदाहरण– $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \pi$ आदि।

10. एक परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का योग या अन्तर एक अपरिमेय संख्या होती है।

11. एक शून्येतर परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का गुणनफल या भागफल एक अपरिमेय संख्या होती है।

पाठ्यपुस्तक के प्रश्न

प्रश्नावली 1.1

1. निम्नलिखित संख्याओं को अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए–

(i) 140 (ii) 156 (iii) 3825
(iv) 5005 (v) 7429

हल– (i) 140 के अभाज्य गुणनखण्ड

$= 2 \times 70$
$= 2 \times 2 \times 35$
$= 2 \times 2 \times 5 \times 7$
$= 2^2 \times 5 \times 7$ **उत्तर**

(ii) 156 के अभाज्य गुणनखण्ड

$= 2 \times 78$
$= 2 \times 2 \times 39$
$= 2 \times 2 \times 3 \times 13$
$= 2^2 \times 3 \times 13$ **उत्तर**

(iii) 3825 के अभाज्य गुणनखण्ड

$= 3 \times 1275$
$= 3 \times 3 \times 425$
$= 3 \times 3 \times 5 \times 85$
$= 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 17$
$= 3^2 \times 5^2 \times 17$ **उत्तर**

(iv) 5005 के अभाज्य गुणनखण्ड

$= 5 \times 1001$
$= 5 \times 7 \times 143$
$= 5 \times 7 \times 11 \times 13$ **उत्तर**

(v) 7429 के अभाज्य गुणनखण्ड

$= 17 \times 437$
$= 17 \times 19 \times 23$ **उत्तर**

2. पूर्णांकों के निम्नलिखित युग्मों के HCF और LCM ज्ञात कीजिए तथा इसकी जाँच कीजिए कि दो संख्याओं का गुणनफल = HCF × LCM है।

(i) 26 और 91 (ii) 510 और 92
(iii) 336 और 54

हल– (i) 26 और 91

26 के अभाज्य गुणनखण्ड $= 2 \times 13$
91 के अभाज्य गुणनखण्ड $= 7 \times 13$
$\therefore$ 26 और 91 का LCM $= 2 \times 7 \times 13 = 182$
तथा 26 और 91 का HCF = 13

सत्यापन–HCF (26, 91) × LCM (26, 91)

$= 13 \times 182$
$= 13 \times 2 \times 91$
$= 26 \times 91$
= दी गई संख्याओं का गुणनफल

(ii) 510 और 92

510 के अभाज्य गुणनखण्ड

$= 2 \times 255$
$= 2 \times 3 \times 85$
$= 2 \times 3 \times 5 \times 17$

तथा 92 के अभाज्य गुणनखण्ड

$= 2 \times 46$
$= 2 \times 2 \times 23$
$= 2^2 \times 23$

LCM (510, 92) $= 2^2 \times 3 \times 5 \times 17 \times 23$
$= 23460$

तथा HCF (510, 92) = 2

सत्यापन–HCF (510, 92) × LCM (510, 92)

$= 2 \times 23460$
$= 2 \times 2^2 \times 3 \times 5 \times 17 \times 23$
$= 2 \times 3 \times 5 \times 17 \times 2^2 \times 23$
$= 510 \times 92$
= दी गई संख्याओं का गुणनफल

(iii) 336 और 54

336 के अभाज्य गुणनखण्ड $= 2 \times 168$

$= 2 \times 2 \times 84$
$= 2 \times 2 \times 2 \times 42$
$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 21$
$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7$
$= 2^4 \times 3 \times 7$

54 के अभाज्य गुणनखण्ड $= 2 \times 27$

$= 2 \times 3 \times 9$

$= 2 \times 3 \times 3 \times 3$

$= 2 \times 3^3$

$\therefore$ HCF (336, 54) $= 2 \times 3 = 6$

LCM $= 2^4 \times 3^3 \times 7$

$= 3024$

सत्यापन–HCF (336, 54)$\times$ LCM (336, 54)

$= 6 \times 3024$

$= 2 \times 3 \times 2^4 \times 3^3 \times 7$

$= 2^4 \times 3 \times 7 \times 2 \times 3^3$

$= 336 \times 54$

= दी गई संख्याओं का गुणनफल

3. अभाज्य गुणनखण्डन विधि द्वारा निम्नलिखित पूर्णांकों के HCF और LCM ज्ञात कीजिए–

(i) 12, 15 और 21 (ii) 17, 23 और 29

(iii) 8, 9 और 25

हल– (i) 12, 15 और 21

12 के अभाज्य गुणनखण्ड $= 2 \times 2 \times 3$

$= 2^2 \times 3$

15 के अभाज्य गुणनखण्ड $= 3 \times 5$

21 के अभाज्य गुणनखण्ड $= 3 \times 7$

$\therefore$ LCM (12, 15 और 21)

$= 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$ **उत्तर**

तथा HCF (12, 15 और 21) = 3 **उत्तर**

(ii) 17, 23 और 29

17 के अभाज्य गुणनखण्ड $= 1 \times 17$

23 के अभाज्य गुणनखण्ड $= 1 \times 23$

29 के अभाज्य गुणनखण्ड $= 1 \times 29$

$\therefore$ LCM (17, 23 और 29)

$= 17 \times 23 \times 29$

$= 11339$ **उत्तर**

तथा HCF (17, 23 और 29) = 1 **उत्तर**

(iii) 8, 9 और 25

8 के अभाज्य गुणनखण्ड

$= 2 \times 2 \times 2 = (2)^3 \times 1$

9 के अभाज्य गुणनखण्ड

$= 3 \times 3 = (3)^2 \times 1$

25 के अभाज्य गुणनखण्ड

$= 5 \times 5 = (5)^2 \times 1$

$\therefore$ LCM (8, 9 और 25) $= (2)^3 \times (3)^2 \times (5)^2$

$= 8 \times 9 \times 25$

$= 1800$ **उत्तर**

तथा HCF (8, 9 और 25) = 1 **उत्तर**

4. HCF (306, 657) = 9 दिया है। LCM (306, 657) ज्ञात कीजिए।

हल– प्रश्नानुसार संख्याएँ 306 व 657 हैं।

$\therefore$ $a = 306$, $b = 657$ और H.C.F. = 9 दिया है।

हम जानते हैं कि

$$\text{L.C.M.} = \frac{a \times b}{\text{H.C.F.}}$$

$$= \frac{306 \times 657}{9}$$

$= 34 \times 657 = 22338$

अत: L.C.M. (306, 657) = 22338 **उत्तर**

5. जाँच कीजिए कि क्या किसी प्राकृत संख्या n के लिए, संख्या 6^n अंक 0 पर समाप्त हो सकती है।

हल–माना कि किसी प्राकृत संख्या n के लिए, $n \in$ N, 6^n अंक 0 पर समाप्त होती है अत: 6^n, 5 से विभाज्य होगी।

परन्तु 6 के अभाज्य गुणनखण्ड $6 = 2 \times 3$

$\therefore$ $(6)^n$ के अभाज्य गुणनखण्ड $(6)^n = (2 \times 3)^n$ होंगे।

अर्थात् यह स्पष्ट हो रहा है कि 6^n के अभाज्य गुणनखण्डों में 5 का कोई स्थान नहीं है।

$\therefore$ 6^n का कोई गुणनखण्ड 5 नहीं हो सकता है अर्थात् संख्या 6^n अंक शून्य पर समाप्त नहीं हो सकती है।

6. व्याख्या कीजिए कि $7 \times 11 \times 13 + 13$ और $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ भाज्य संख्याएँ क्यों हैं?

हल–प्रश्नानुसार $7 \times 11 \times 13 + 13$

$= 13\ (7 \times 11 + 1)$

चूँकि इस प्राप्त संख्या का एक गुणनखण्ड 13 है अत: यह एक भाज्य संख्या है। पुन: प्रश्नानुसार

$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$

$= 5\ (7 \times 6 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 1)$

यह प्राप्त संख्या भी एक भाज्य संख्या है क्योंकि इसका भी एक गुणनखण्ड 5 है। अत: दी गई दोनों संख्याएँ भाज्य संख्याएँ हैं।

7. किसी खेल के मैदान के चारों ओर एक वृत्ताकार पथ है। इस मैदान का एक चक्कर लगाने में सोनिया को 18 मिनट लगते हैं, जबकि इसी मैदान का एक चक्कर लगाने में रवि को 12 मिनट लगते हैं। मान लीजिए वे दोनों एक ही स्थान और एक ही समय पर चलना प्रारम्भ करके एक ही दिशा में चलते हैं। कितने समय बाद वे पुन: प्रारम्भिक स्थान पर मिलेंगे?

हल–सोनिया द्वारा वृत्ताकार मैदान का 1 चक्कर लगाने का समय = 18 मिनट

रवि द्वारा उसी मैदान का एक चक्कर लगाने में लगा समय = 12 मिनट

यह ज्ञात करने के लिए कि वे पुन: दोनों कितने समय के बाद प्रारम्भिक बिन्दु पर मिलेंगे, हमें 18 व 12 का LCM ज्ञात करना होगा।

अत: 18 के अभाज्य गुणनखण्डन $= 2 \times 9$

$= 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$

तथा 12 के अभाज्य गुणनखण्डन $= 2 \times 6$

$= 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$

18 और 12 के सभी अधिकतम घातांक में अभाज्य गुणनखण्डों का गुणनफल लेने पर

$\therefore$ LCM $(18, 12) = 2^2 \times 3^2$

$= 4 \times 9 = 36$

अर्थात् सोनिया एवं रवि प्रारम्भिक स्थान पर 36 मिनट बाद मिलेंगे। **उत्तर**

प्रश्नावली 1.2

1. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल–माना कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। अत: हम ऐसे दो पूर्णांक r व s प्राप्त कर सकते हैं जहाँ $s \neq 0$

$$\sqrt{5} = \frac{r}{s}$$

अब पुन: माना कि r व s में, 1 के अतिरिक्त अन्य कुछ गुणनखण्ड हैं तो हम उस उभयनिष्ठ गुणनखण्ड से r और s को विभाजित करके $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ प्राप्त कर सकते हैं। यहाँ a और b सहअभाज्य है।

अर्थात् $\quad b\sqrt{5} = a$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$\Rightarrow \quad (b\sqrt{5})^2 = a^2$$

$$\Rightarrow \quad b^2(\sqrt{5})^2 = a^2$$

$$\Rightarrow \quad 5b^2 = a^2 \qquad \text{.... (i)}$$

अत: 5, a^2 को विभाजित करता है।

प्रमेय 1.3 के अनुसार यदि एक अभाज्य संख्या p, a^2 को विभाजित करती है तो p, a को भी विभाजित करेगी, जहाँ a एक धनात्मक पूर्णांक है।

$\Rightarrow$ 5, a को भी विभाजित करता है। .... (ii)

अत: $a = 5c$ जहाँ c कोई पूर्णांक है।

a का मान (i) में रखने पर

$$5b^2 = (5c)^2$$
$$5b^2 = 25c^2$$
$$b^2 = 5c^2$$

या $\quad 5c^2 = b^2$

$\Rightarrow$ 5, b^2 को विभाजित करता है।

प्रमेय के अनुसार 5, b को भी विभाजित करता है। .... (iii)

(ii) व (iii) से, a और b का कम से कम एक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड 5 है। परन्तु यह इस तथ्य का विरोधाभासी है कि a और b अविभाज्य हैं या इनके 1 के अतिरिक्त अन्य कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड हैं। अत: हमारी कल्पना कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है, असत्य है। अर्थात् $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। **(इतिसिद्धम्)**

2. सिद्ध कीजिए कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल– माना कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। अत: हम अविभाज्य संख्या a और b प्राप्त कर सकते हैं जहाँ a और b पूर्णांक हैं कि $b \neq 0$ तथा

$$3 + 2\sqrt{5} = \frac{a}{b}$$

या $\quad \frac{a}{b} - 3 = 2\sqrt{5}$

या $\quad \sqrt{5} = \frac{a}{2b} - \frac{3}{2}$

या $\quad \sqrt{5} = \frac{a-3b}{2b}$

$\because$ a और b पूर्णांक हैं

$\therefore$ $\frac{a-3b}{2b}$ एक परिमेय संख्या है।

अर्थात् $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। परन्तु यह तथ्य इस कथन का खण्डन करता है कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। अर्थात् यह कल्पना असत्य है। अत: दी गई संख्या $3 + 2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। **(इतिसिद्धम्)**

3. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित संख्याएँ अपरिमेय हैं–

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(ii)** $7\sqrt{5}$ **(iii)** $6 + \sqrt{2}$

हल– (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

प्रश्न में दिए गए कथन के विपरीत माना कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक परिमेय संख्या है। अत: हम अविभाज्य पूर्णांक a और b $(b \neq 0)$ प्राप्त कर सकते हैं अर्थात्

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

या $$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{b}$$

या $$\sqrt{2} = \frac{2a}{b} \quad ....(i)$$

क्योंकि दो पूर्णांकों का भागफल एक परिमेय संख्या होती है।

अत: $\frac{2a}{b}$ = एक परिमेय संख्या

(i) से $\sqrt{2}$ भी एक परिमेय संख्या है। परन्तु यह कथन असत्य है। अर्थात् हमारी कल्पना असत्य है। अत: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक अपरिमेय संख्या है। **(इतिसिद्धम्)**

(ii) $7\sqrt{5}$

माना कि दी गई संख्या $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। अत: हम ऐसे दो पूर्णांक a और b $(b \neq 0)$ प्राप्त कर सकते हैं कि

$$7\sqrt{5} = \frac{a}{b}$$

या $$7b\sqrt{5} = a$$

या $$\sqrt{5} = \frac{a}{7b} \quad .... (i)$$

चूँकि (i) में a, 7 और b सभी पूर्णांक हैं तथा दो पूर्णांकों का भाग भी एक परिमेय संख्या होती है। अर्थात्

$\frac{a}{7b}$ = एक परिमेय संख्या

अत: (i) से $\sqrt{5}$ = एक परिमेय संख्या

जो कि कथन $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है, का विरोधाभासी कथन है। अर्थात् हमारी कल्पना असत्य है। अत: $7\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। **(इतिसिद्धम्)**

(iii) $6+\sqrt{2}$

माना कि $6+\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है। अत: हम ऐसी सह-अभाज्य संख्याएँ a और b $(b \neq 0)$ ज्ञात कर सकते हैं कि

$$6+\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

या $$\sqrt{2} = \frac{a}{b} - 6$$

या $$\sqrt{2} = \frac{a-6b}{b} \quad ....(i)$$

चूँकि a तथा b पूर्णांक हैं अत: $\frac{a-6b}{b}$ भी एक पूर्णांक संख्या होगी क्योंकि पूर्णांकों की बाकी तथा पूर्णांकों का भाग भी पूर्णांक होता है। अर्थात्

$\frac{a-6b}{b}$ = एक परिमेय संख्या

$\therefore$ (i) से $\sqrt{2}$ = एक परिमेय संख्या

परन्तु यह कथन कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या होती है, का विरोधाभासी कथन है। अत: हमारी कल्पना असत्य है। अर्थात् $6+\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है। **(इतिसिद्धम्)**

अन्य महत्त्वपूर्ण प्रश्न

बहुविकल्पीय प्रश्न–

1. निम्न में से अपरिमेय संख्या है–

(माध्य. शिक्षा बोर्ड, 2022)

(A) 2 (B) 2.232425.....
(C) $2.\overline{23}$ (D) 2.23

2. दिया गया है कि HCF (156, 78) = 78, तो LCM (156, 78) का मान होगा—
(A) 78 (B) 156
(C) 156×78 (D) इनमें से कोई नहीं

3. 225 के अभाज्य गुणनखण्डों को निम्न रूप में लिखा जा सकता है—
(A) $5^2 \times 3^2$ (B) 5×3^2
(C) $5^2 \times 3$ (D) 5×3

4. एक ऐसी संख्या जिसके 1 और स्वयं के अतिरिक्त कोई गुणनखण्ड न हो, कहलाती है–
(A) भाज्य संख्या (B) अभाज्य संख्या
(C) सम संख्या (D) विषम संख्या

5. सबसे छोटी अभाज्य संख्या है–
(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2

6. दो या अधिक संख्याओं का HCF (महत्तम समापवर्तक) होता है–
(A) सबसे छोटा उभयनिष्ठ
(B) केवल उभयनिष्ठ
(C) सबसे बड़ी संख्या
(D) सबसे बड़ा उभयनिष्ठ

7. 144 और 198 का म.स.प. होगा—
(A) 6 (B) 12
(C) 9 (D) 18

8. वास्तविक संख्याएँ कहलाती हैं–
(A) केवल परिमेय संख्याएँ
(B) केवल अपरिमेय संख्याएँ
(C) परिमेय एवं अपरिमेय दोनों
(D) उपर्युक्त में से कोई नहीं